Geometria Curbelor şi Suprafeţelor
Teorie şi Aplicaţii

Mircea NEAGU

Cuprins

1 Conice **7**

1.1 Conice pe ecuaţii reduse 7

1.1.1 Cercul 7

1.1.2 Elipsa 8

1.1.3 Hiperbola 10

1.1.4 Parabola 11

1.1.5 Reuniuni de drepte, punct şi mulţime vidă 12

1.2 Conice pe ecuaţie generală 13

1.3 Invarianţii metrici Δ, δ şi I ai unei conice 13

1.3.1 Invarianţa lui Δ, δ şi I la translaţii 14

1.3.2 Invarianţa lui Δ, δ şi I la transformări ortogonale 15

1.4 Centrul unei conice 17

1.5 Reducerea la forma canonică a conicelor cu centru ($\delta \neq 0$) 19

1.6 Reducerea la forma canonică a conicelor fără centru ($\delta = 0$) 22

1.7 Clasificarea conicelor. Reprezentare grafică 25

1.8 Probleme rezolvate 36

1.9 Probleme propuse 43

2 Cuadrice **49**

2.1 Cuadrice pe ecuaţii reduse 49

2.1.1 Sfera 49

2.1.2 Elipsoidul 50

2.1.3 Hiperboloidul cu o pânză 52

2.1.4 Hiperboloidul cu două pânze 54

2.1.5 Paraboloidul eliptic 55

2.1.6 Paraboloidul hiperbolic 56

2.1.7 Conul 57

2.1.8 Cilindri 59

2.1.9 Reuniuni de plane, dreaptă, punct şi mulţime vidă 60

2.2 Cuadrice pe ecuaţie generală 61

2.3 Invarianţii Δ, δ, I şi J ai unei cuadrice 62

2.3.1 Invarianţa lui Δ, δ, I şi J la translaţii 63

2.3.2 Invarianţa lui Δ, δ, I şi J la transformări ortogonale 64

2.4 Centrul unei cuadrice 66

2.5 Reducerea la forma canonică a cuadricelor cu centru ($\delta \neq 0$) 68

2.6 Reducerea la forma canonică a cuadricelor fără centru ($\delta = 0$) 70

2.7 Metoda roto-translaţiei pentru recunoaşterea cuadricelor 75

2.8 Probleme rezolvate 83

2.9 Probleme propuse 94

3 Generări de suprafeţe **99**
3.1 Suprafeţe cilindrice 99
3.2 Suprafeţe conice 101
3.3 Suprafeţe de rotaţie 104
3.4 Probleme rezolvate 106
3.5 Probleme propuse 111

4 Curbe plane **115**
4.1 Definiţii şi exemple 115
4.2 Dreaptă tangentă şi dreaptă normală 120
4.2.1 Curbe parametrizate 120
4.2.2 Curbe definite implicit 122
4.3 Reperul lui Frénet. Curbura unei curbe plane 124
4.4 Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe plane 127
4.5 Lungimea unei curbe plane. Parametrizarea canonică 130
4.6 Interpretări geometrice pentru curbura unei curbe plane 133
4.7 Probleme rezolvate 136
4.8 Probleme propuse 140

5 Curbe în spaţiu **143**
5.1 Definiţii şi exemple 143
5.2 Dreaptă tangentă şi plan normal 148
5.2.1 Curbe parametrizate 148
5.2.2 Curbe definite implicit 149
5.3 Triedrul lui Frénet. Curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu 151
5.4 Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe în spaţiu 156
5.5 Lungimea unei curbe în spaţiu. Parametrizarea canonică 158
5.6 Interpretări geometrice ale curburii şi torsiunii 162
5.7 Probleme rezolvate 168
5.8 Probleme propuse 178

6 Suprafeţe **183**
6.1 Definiţii şi exemple 183
6.2 Plan tangent şi dreaptă normală 191
6.2.1 Suprafeţe parametrizate 191
6.2.2 Suprafeţe definite implicit 195
6.3 Formele fundamentale ale unei suprafeţe 197
6.4 Aplicaţia lui Weingarten. Curburile unei suprafeţe 200
6.5 Interpretări geometrice ale curburilor unei suprafeţe 211
6.6 Geodezice pe o suprafaţă 218
6.7 Probleme rezolvate 221
6.8 Probleme propuse 229

PREFAȚĂ

Această carte reprezintă un Curs despre Teoria Geometrică a Curbelor şi Suprafeţelor, adresat în principal studenţilor din anul I de la facultăţile tehnice. Scopul acestui curs este de a-i iniţia pe viitorii ingineri în tainele geometriei curbelor şi suprafeţelor, atât de necesară formării unei culturi tehnice solide. Din acest motiv, s-a încercat ca materialul prezentat să aibă un puternic caracter didactic fără a se neglija însă rigurozitatea matematică specifică ştiinţelor exacte.

Actualul mod de prezentare al cărţii îmbină experienţa universitară a autorilor menţionaţi în bibliografie cu experienţa proprie a autorului, dobândită de-a lungul mai multor ani de predare la catedră. Din această perspectivă, considerăm că modul de prezentare a materiei, precum şi multitudinea şi varietatea exemplelor folosite, asigură prezentei cărţi un grad destul de mare de independenţă şi sinteză în raport cu bibliografia existentă.

În această carte noţiunile matematice sunt introduse gradual, pornindu-se de la studiul geometriei conicelor şi cuadricelor (prin intermediul reducerii la forma canonică a unei forme pătratice prin metoda valorilor proprii) şi continuându-se cu expunerea generală a geometriei diferenţiale a curbelor şi suprafeţelor. În cadrul geometriei diferenţiale a curbelor şi suprafeţelor sunt prezentate principalele entităţi geometrice (cum ar fi curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu sau curburile principale, Gauss şi medie ale unei suprafeţe) care caracterizează forma locală a unei curbe sau suprafeţe. Din considerente didactice, fiecare Capitol al cărţii este structurat pe Secţiuni, după cum urmează:

1. expunerea detaliată şi riguroasă a Elementelor de Teorie, cu demonstraţii, exemple şi contraexemple;

2. prezentarea unui set corespunzător de Probleme Rezolvate, necesar unei mai bune înţelegeri a conceptelor teoretice studiate;

3. finalizarea expunerii printr-o listă de Probleme Propuse, cu Indicaţii şi Răspunsuri.

Pentru simplificarea expunerii noţiunilor, autorul a utilizat identificarea naturală a unor spaţii, pornindu-se de la ideea că spaţiul $\mathbb{R}^n$ este modelul standard de spaţiu vectorial euclidian de dimensiune n. Totodată, pentru a se evita supraîncărcarea şi a se fluentiza exprimarea, limbajul şi notaţiile sunt uneori simplificate, autorul considerând că cititorul înţelege din context sensul corect al noţiunii sau formulei expuse.

În final, pentru o mai frumoasă perspectivă asupra conţinutului de ansamblu al acestei cărţi, am dori să reamintim cititorului că, din punct de vedere etimologic, cuvântul "geometrie" îşi are obârşia în limba greacă $<$ gr. ge – pământ, metron – măsură $>$, ceea ce s-ar traduce prin "măsurătorile pământului". În consecinţă, reamintim şi faptul (cunoscut publicului larg) că geometria ca ştiinţă este ramura matematicii care studiază formele şi proprietăţile măsurabile ale figurilor plane şi spaţiale.

Conştient de faptul că materialul de faţă poate suporta îmbunătăţiri, autorul acestuia aduce mulţumiri anticipate tuturor cititorilor care vor avea de făcut critici sau sugestii legate de acesta.

Autorul, 2013

1. CONICE

Conicele sau *curbele algebrice de grad doi* reprezintă o clasă de curbe plane cu proprietăţi remarcabile, întâlnite în aplicaţii din diverse domenii. Acestea sunt caracterizate, într-un reper cartezian ortonormat din planul E_2, printr-o ecuaţie de forma

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde funcţia $g(x, y)$ este o funcţie polinomială de grad doi în nedeterminatele x şi y. Din punct de vedere geometric, în acest capitol vom demostra că o conică nu poate reprezenta în plan decât una dintre următoarele figuri geometrice: *elipsă*, în particular *cerc*, *hiperbolă*, *parabolă*, *reuniune de drepte paralele*, *confundate* sau *concurente*, *un punct* sau *mulţimea vidă*.

1.1 Conice pe ecuaţii reduse

Vom prezenta în această secţiune caracterizările algebrice şi principalele proprietăţi geometrice ale elipselor, în particular cercurilor, hiperbolelor şi parabolelor, studiate în repere carteziene ortonormate alese convenabil, după fiecare caz în parte. Fixăm pentru început reperul ortonormat

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$$

în planul bidimensional al geometriei euclidiene E_2, adică fixăm în E_2 un sistem ortogonal de axe (coordonate) xOy.

1.1.1 Cercul

Definiţia 1.1.2 *Se numeşte* ***cerc*** *de centru* $C(x_0, y_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$ *mulţimea* (C) *a punctelor din plan* $M(x, y)$ *care verifică relaţia*

$$d(M, C) = r.$$

Observaţia 1.1.3 *Este evident că mulţimea punctelor din plan* $M(x, y)$ *care aparţin cercului* (C) *de centru* $C(x_0, y_0)$ *şi de rază* $r > 0$ *satisface ecuaţia de grad doi*

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

numită ***ecuaţia carteziană implicită a cercului de centru*** $C(x_0, y_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$.

Dezvoltând pătratele în ecuaţia carteziană implicită a cercului (C), obţinem ecuaţia

$$(C) : x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0,$$

care ne sugerează studiul geometric al ecuaţiei de gradul doi (ecuaţie de conică) de forma

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Deoarece ecuaţia conicei Γ se transcrie sub forma

$$\Gamma : (x + a)^2 + (y + b)^2 = \rho,$$

unde $\rho = a^2 + b^2 - c$, rezultă că avem următoarele situaţii:

1. Dacă $\rho > 0$, atunci mulţimea Γ este un cerc de centru $C(x_0, y_0)$, unde $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, şi de rază $r = \sqrt{\rho}$;

2. Dacă $\rho = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;

3. Dacă $\rho < 0$, atunci $\Gamma = \{\emptyset\}$.

Definiţia 1.1.4 *Ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

unde

$$a^2 + b^2 - c > 0,$$

se numeşte ***ecuaţia carteziană generală a cercului.***

1.1.2 Elipsa

Definiţia 1.1.3 *Locul geometric al punctelor din plan a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe F_1 şi F_2 este constantă se numeşte* ***elipsă.***

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$, unde $c > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

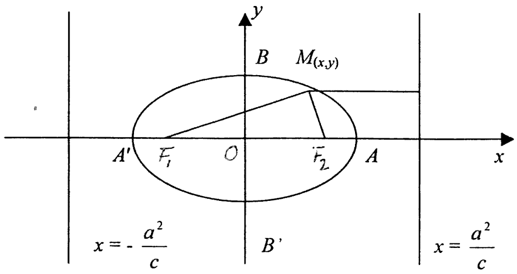
unde $a > 0$, este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(E) : \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

În această ecuaţie, trecând al doilea termen din stânga în membrul drept şi ridicând de două ori consecutiv la pătrat, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a elipsei*:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.



Elipsa (E)

În cazul elipsei (E), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

1. Punctele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ se numesc *focarele* elipsei (E);

2. Segmentele $OA = a$ şi $OB = b$ se numesc *semiaxa mare* şi *semiaxa mică* ale elipsei (E) şi reprezintă *axele de simetrie* ale elipsei (E);

3. Punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(b, 0)$ şi $B'(-b, 0)$ se numesc *vârfurile* elipsei (E);

4. Punctul $O(0, 0)$ se numeşte *centrul de simetrie* al elipsei (E);

5. Dreptele $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ se numesc *directoarele* elipsei (E);

6. Numărul real $e = \dfrac{c}{a} < 1$ se numeşte *excentricitatea* elipsei (E).

Observaţia 1.1.4 *Elipsa (E) poate fi gândită şi ca locul geometric al punctelor din plan $M(x, y)$ care verifică una dintre relaţiile:*

$$\frac{MF_1}{d(M, D_1)} = e < 1 \text{ sau } \frac{MF_2}{d(M, D_2)} = e < 1,$$

unde $D_1 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ şi $D_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$ reprezintă directoarele elipsei (E).

Observaţia 1.1.5 *Dacă în ecuaţia elipsei (E) luăm*

$$a = b = r > 0,$$

atunci elipsa (E) devine un cerc (C) centrat în originea $O(0, 0)$ şi de rază r. Ecuaţia acestui cerc (C) este exprimată prin

$$(C) : x^2 + y^2 = r^2.$$

Deoarece egalitatea $a = b$ implică $c = 0$, rezultă că focarele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ ale cercului (C) se suprapun şi coincid cu centrul $O(0, 0)$ al cercului (C). Mai mult, prin definiţie, admitem că excentricitatea cercului (C) este

$$e = \frac{c}{r} = 0.$$

1.1.3 Hiperbola

Definiţia 1.1.4 *Locul geometric al punctelor din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la două puncte fixe F_1 şi F_2 este constantă se numeşte* ***hiperbolă.***

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$, unde $c > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

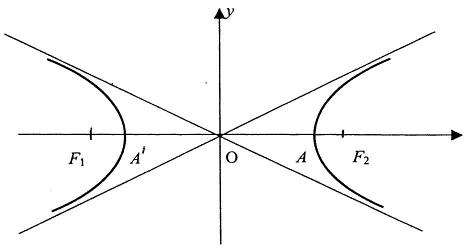
unde $a > 0$, este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(H) : \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

În această ecuaţie, ridicând de două ori consecutiv la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a hiperbolei*:

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Hiperbola (H)

În cazul hiperbolei (H), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

1. Punctele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$ se numesc *focarele* hiperbolei (H);

2. Axele Ox şi Oy se numesc *axele de simetrie* ale hiperbolei (H);

3. Punctele $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$ se numesc *vârfurile* hiperbolei (H);

4. Punctul $O(0, 0)$ se numeşte *centrul de simetrie* al hiperbolei (H);

5. Dreptele $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ se numesc *asimptotele* hiperbolei (H);

6. Dreptele $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ se numesc *directoarele* hiperbolei (H);

7. Numărul real $e = \dfrac{c}{a} > 1$ se numeşte *excentricitatea* hiperbolei (H).

Observaţia 1.1.5 *Hiperbola (H) poate fi gândită şi ca locul geometric al punctelor din plan $M(x, y)$ care verifică una dintre relaţiile:*

$$\frac{MF_1}{d(M, D_1)} = e > 1 \ \textit{sau} \ \frac{MF_2}{d(M, D_2)} = e > 1,$$

unde $D_1 : x = -\dfrac{a^2}{c}$ şi $D_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$ reprezintă directoarele hiperbolei (H).

1.1.4 Parabola

Definiţia 1.1.5 *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix F şi o dreaptă fixă Δ se numeşte* ***parabolă****.*

Dacă alegem xOy un sistem de axe ortogonal preferenţial, astfel încât $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ şi $\Delta : x = -\dfrac{p}{2}$, unde $p > 0$, atunci mulţimea punctelor din plan $M(x, y)$ cu proprietatea

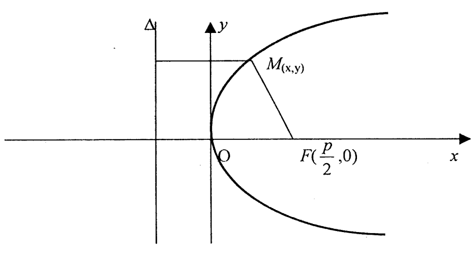
$$MF = d(M, \Delta)$$

este caracterizată algebric de ecuaţia

$$(P) : \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Ridicând această ecuaţie la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem, în urma calculelor, următoarea *ecuaţie carteziană redusă a parabolei*:

$$(P) : y^2 = 2px.$$



Parabola (P)

În cazul parabolei (P), descrisă prin ecuaţia carteziană redusă de mai sus, întâlnim următoarele noţiuni uzuale:

1. Punctul $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ se numeşte *focarul* parabolei (P);

2. Axa Ox se numeşte *axa de simetrie* a parabolei (P);

3. Punctul $O(0,0)$ se numeşte *vârful* parabolei (P);

4. Dreapta $\Delta : x = -\frac{p}{2}$ se numeşte *directoarea* parabolei (P).

Observaţia 1.1.6 ***Excentricitatea*** *parabolei* (P) *poate fi gândită ca raportul constant:*

$$e = \frac{MF}{d(M,\Delta)} = 1.$$

1.1.5 Reuniuni de drepte, punct și mulțime vidă

Definiţia 1.1.6 *Conica* $(DC) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(DC) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***reuniune de drepte concurente.***

Definiţia 1.1.7 *Conica* $(DP) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(DP) : x^2 - a^2 = 0,$$

unde $a > 0$, *se numeşte* ***reuniune de drepte paralele.***

Definiţia 1.1.8 *Conica* $(D) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(D) : x^2 = 0$$

se numeşte ***reuniune de drepte confundate.***

Definiţia 1.1.9 *Conica* $(PCT) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(PCT) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***punct.***

Definiţia 1.1.10 *Conica* $(V) \subset E_2$ *de ecuaţie*

$$(V) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***mulţimea vidă.***

1.2 Conice pe ecuație generală

Să considerăm spaţiul bidimensional al geometriei euclidiene plane E_2 în care am fixat un reper cartezian ortogonal
$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\},$$
adică am fixat un sistem ortogonal de axe (coordonate) xOy.

Definiţia 1.2.1 *Mulţimea punctelor din plan $M(x,y)$ ale căror coordonate verifică o relaţie polinomială de forma*
$$\Gamma : g(x,y) = 0,$$
unde
$$g(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
coeficienţii reali
$$a_{ij} \in \mathbb{R},\ \forall\ i,j = \overline{1,3},$$
verificând relaţia
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0,$$
se numeşte ***conică.***

1.3 Invarianții metrici Δ, δ și I ai unei conice

Pentru început este important să subliniem faptul că dacă unui punct din plan
$$M(x,y) \in E_2$$
îi ataşăm coordonatele *omogene* în spaţiu
$$M(x_1, x_2, x_3) \in E_3$$
legate prin relaţiile
$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ şi } y = \frac{x_2}{x_3},$$
unde $x_3 \neq 0$, atunci expresia ecuaţiei unei conice
$$\Gamma : g(x,y) = 0$$
devine expresia echivalentă a anulării unei forme pătratice
$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
definită prin
$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2,$$
unde $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Definiţia 1.3.1 *Matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea conicei*** Γ ***în sistemul ortogonal de axe*** *xOy.*

Definiţia 1.3.2 *Numerele reale*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \ \text{şi} \ I = a_{11} + a_{22}$$

se numesc ***invarianţii metrici*** *ai conicei* Γ.

Vom demonstra în continuare că invarianţii metrici Δ, δ şi I nu îşi modifică valoarea în urma efectuării unei translaţii sau a unei transformări ortogonale de coordonate.

1.3.1 Invarianța lui Δ, δ și I la translații

Să considerăm că $C(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar din planul geometriei euclidiene E_2. Este evident că translaţia sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'Cy'$, translaţie definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

este echivalentă cu o transformare de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o translaţie ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei conicei

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x') &= a_{11}(x'_1)^2 + 2a_{12}x'_1x'_2 + a_{22}(x'_2)^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x'_1x'_3 + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)x'_2x'_3 + g(x_0, y_0)(x'_3)^2, \end{aligned}$$

unde $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ iar

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}).$$

Definiţia 1.3.2 *Matricea simetrică*

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea conicei*** Γ ***în sistemul ortogonal de axe*** $x'Cy'$.

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & g(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ şi } I' = a_{11} + a_{22},$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 1.3.3 *Numerele reale Δ, δ, I şi Δ', δ', I' verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta', \ \delta = \delta' \text{ şi } I = I'.$$

Demonstraţie. Egalităţile $\delta = \delta'$ şi $I = I'$ sunt evidente. Pentru a demonstra egalitatea $\Delta = \Delta'$ folosim proprietăţile determinanţilor. Astfel, dacă înmulţim în determinantul Δ' prima coloană cu $(-x_0)$ şi a doua coloană cu $(-y_0)$ şi rezultatele le adunăm la ultima coloană, obţinem ceea ce trebuia demonstrat. ■

1.3.2 Invarianța lui Δ, δ și I la transformări ortogonale

Este evident că o transformare ortogonală de coordonate în plan definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

unde $B \cdot {}^TB = I_2$, este echivalentă cu o transformare ortogonală de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o transformare ortogonală de coordonate ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei conicei

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x'') = a_{11}''(x_1'')^2 + 2a_{12}''x_1''x_2'' + a_{22}''(x_2'')^2 + 2a_{13}''x_1''x_3'' + 2a_{23}''x_2''x_3'' + a_{33}''(x_3'')^2,$$

unde $x'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$.

Definiţia 1.3.3 *Matricea simetrică*

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea conicei*** Γ ***în sistemul ortogonal de axe*** $x''Oy''$.

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}, \ \delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{12} & a''_{22} \end{vmatrix} \text{ şi } I'' = a''_{11} + a''_{22}.$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 1.3.4 *Numerele reale Δ, δ, I şi Δ'', δ'', I'' verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta'', \ \delta = \delta'' \text{ şi } I = I''.$$

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că avem $\delta = \delta''$ şi $I = I''$. Pentru aceasta, fie forma pătratică

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

În urma transformării ortogonale de mai sus, forma pătratică φ capătă expresia

$$\varphi(x'', y'') = (x'', y'') \cdot \ {}^{T}B \cdot A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numerele reale δ şi I caracterizează polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I\lambda + \delta,$$

rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$A'' = {}^{T} B \cdot A \cdot B.$$

În concluzie, avem

$$\delta = \delta'' \text{ şi } I = I''.$$

Repetând raţionamentul de mai sus pentru forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

deducem că, în urma transformării ortogonale omogene de mai sus, forma pătratică Q capătă expresia

$$Q(x'') = (x_1'', x_2'', x_3'') \cdot \begin{pmatrix} {}^TB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul real Δ caracterizează polinomul caracteristic

$$P_{\overline{A}}(\lambda) = \det(\overline{A} - \lambda I_3) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - \Delta,$$

unde $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} {}^TB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, avem

$$\Delta = \Delta''.$$

■

1.4 Centrul unei conice

Fie conica $\Gamma : g(x, y) = 0$, unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

şi fie $C(x_0, y_0)$ un punct arbitrar din planul geometriei euclidiene E_2.

Definiţia 1.4.1 *Punctul $C(x_0, y_0)$ se numeşte* ***centru*** *al conicei Γ dacă este satisfăcută următoarea afirmaţie logică:*

$$\forall\ P(x, y) \in \Gamma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y) \in \Gamma.$$

Observaţia 1.4.2 *Din punct de vedere geometric, definiţia anterioară arată că punctul C este centrul unei conice Γ dacă pentru orice punct P de pe conica Γ simetricul său faţă de punctul C se află tot pe conica Γ. Din acest motiv, dacă există, centrul unei conice Γ se mai numeşte şi* ***centrul de simetrie*** *al conicei Γ.*

Teorema 1.4.3 *Punctul $C(x_0, y_0)$ este centru al conicei Γ dacă şi numai dacă*

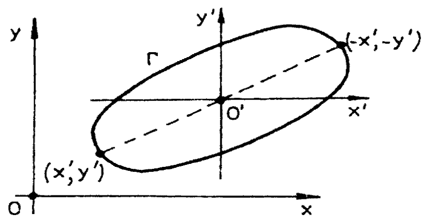
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Efectuând translaţia sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'O'y'$, unde $O' = C$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0, \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' + g(x_0, y_0) = 0.$$



Centrul $O' = C$ al conicei Γ

Evident, din definiţia centrului unei conice deducem că condiţia ca noua origine

$$O'(0, 0) = C(x_0, y_0)$$

a sistemului de axe $x'O'y'$ să fie centru al conicei Γ se reduce la verificarea afirmaţiei logice

$$\forall\ P(x', y') \in \Gamma \Rightarrow P'(-x', -y') \in \Gamma.$$

Această condiţie este echivalentă cu egalitatea

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' + g(x_0, y_0) = 0$$

pentru orice punct $P(x', y') \in \Gamma$. Prin scădere, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)y' = 0,\ \forall\ P(x', y') \in \Gamma.$$

Deoarece punctul $P(x', y') \in \Gamma$ este arbitrar, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

■

Observaţia 1.4.4 *Deoarece determinantul sistemului liniar*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

rezultă că următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. *Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica $\Gamma : g(x, y) = 0$ are* ***un unic centru*** *$C(x_0, y_0)$ ale cărui coordonate sunt determinate de sistemul Cramer anterior. Vom demonstra în acest capitol că conicele cu centru sunt:* ***cercul, elipsa, hiperbola, perechea de drepte concurente****,* ***un punct*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

2. *Dacă $\delta = 0$, atunci conica $\Gamma : g(x, y) = 0$ ori nu are* ***nici un centru****, ori admite* ***o dreaptă de centre****. Vom demonstra în acest capitol că conicele* ***fără centru*** *sunt* ***parabolele*** *iar conicele cu* ***o dreaptă de centre*** *sunt:* ***perechile de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă****.*

1.5 Reducerea la forma canonică a conicelor cu centru ($\delta \neq 0$)

Să considerăm acum că $\Gamma : g(x, y) = 0$ este o conică cu centrul $C(x_0, y_0)$. După cum am observat în demonstraţia teoremei precedente, efectuând o translaţie a sistemului de axe xOy în sistemul de axe $x'O'y'$, unde $O' = C$, ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

Să studiem în continuare forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x', y') = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2.$$

Evident, matricea simetrică ataşată formei pătratice φ în baza canonică a spaţiului vectorial euclidian ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ este

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Atunci, conform metodei valorilor proprii de reducere la forma canonică a formelor pătratice, există un sistem de coordonate $XO'Y$ în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică

$$\varphi(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt valorile proprii ale matricii A.

Evident, valorile proprii λ_1 şi λ_2 sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

unde $\delta \neq 0$.

Să presupunem acum că baza în care se obţine forma canonică a formei pătratice φ este baza ortonormată formată din vectorii proprii

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2. Atunci, transformarea de coordonate care realizează forma canonică a formei pătratice φ este dată de relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

este ortogonală, adică verifică relaţia $\mathcal{R} \cdot {}^T\mathcal{R} = I_2$.

1. Relaţia matriceală $\mathcal{R} \cdot {}^T\mathcal{R} = I_2$ implică egalitatea $\det \mathcal{R} = \pm 1$.

2. Dacă $\det \mathcal{R} = 1$, atunci trecerea de la sistemul de axe $x'O'y'$ la sistemul de axe $XO'Y$ se realizează geometric printr-o rotaţie. Direcţiile şi sensurile noilor axe de coordonate $O'X$ şi $O'Y$ sunt determinate de reprezentanţii legaţi în punctul $O' = C$ ai vectorilor proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$.

3. Dacă $\det \mathcal{R} = -1$, atunci trecerea de la sistemul de axe $x'O'y'$ la sistemul de axe $XO'Y$ se realizează geometric printr-o rotaţie urmată de o simetrie. Din acest motiv, în aplicaţii vom renumerota, dacă este cazul, valorile proprii λ_1 şi λ_2 şi, implicit, vectorii proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$, astfel încât $\det \mathcal{R} = 1$.

În urma rotaţiei de mai sus (i.e. $\det \mathcal{R} = 1$), expresia ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

Evident, matricea conicei Γ în sistemul de axe $XO'Y$ este

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & g(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de invarianţa lui Δ şi δ la translaţii şi transformări ortogonale de coordonate, deducem că

$$\Delta = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot g(x_0, y_0) \text{ şi } \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

adică

$$g(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

În concluzie, în urma unei roto-translaţii convenabile, ecuaţia conicei Γ cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ poate fi scrisă în *forma canonică:*

$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Teorema 1.5.1 *Dacă $\Gamma : g(x, y) = 0$ este o conică cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$, atunci conica Γ poate reprezenta în plan una dintre următoarele figuri geometrice: o **elipsă**, în particular un **cerc**, o **hiperbolă**, o **reuniune de drepte concurente**, **un punct** sau **mulţimea vidă**.*

Demonstraţie. Ţinând cont de ecuaţia canonică a conicei Γ scrisă anterior şi utilizând notaţiile

$$a = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right|},\ b = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right|},\ \alpha = \sqrt{|\lambda_1|} \text{ şi } \beta = \sqrt{|\lambda_2|},$$

avem următoarele situaţii posibile:

1. $\Delta \neq 0$;

   (a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$;

      i. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ şi $\Delta < 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi $\Delta > 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma (*elipsă*)

      $$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

      ii. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ şi $\Delta > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi $\Delta < 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma (*mulţimea vidă*)

      $$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0;$$

   (b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ sau $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$;

      i. Dacă $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ şi $\Delta < 0$ sau $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ şi $\Delta > 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

      $$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0;$$

      ii. Dacă $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ şi $\Delta > 0$ sau $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ şi $\Delta < 0$, atunci ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

      $$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

      În ambele cazuri suntem în prezenţa unei *hiperbole*;

2. $\Delta = 0$;

   (a) $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ sau $\lambda_1, \lambda_2 < 0$;
   În acest caz ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

   $$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow X = Y = 0.$$

   În acest caz avem de-a face cu *un punct* care este exact centrul conicei $C(x_0, y_0)$;

   (b) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ sau $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$;
   În acest caz ecuaţia canonică a conicei Γ poate fi pusă sub forma

   $$\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha X - \beta Y)(\alpha X + \beta Y) = 0.$$

   În această situaţie avem de-a face cu *reuniunea a două drepte concurente* D_1 şi D_2 descrise de ecuaţiile

   $$D_1 : \alpha X - \beta Y = 0 \text{ şi } D_2 : \alpha X + \beta Y = 0.$$

   Punctul de intersecţie al dreptelor D_1 şi D_2 este exact centrul conicei $C(x_0, y_0)$.

■

Corolarul 1.5.2 (Clasificarea conicelor cu centru) *Să considerăm că*

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

este o conică cu centru ($\delta \neq 0$). Atunci, următoarea clasificare a conicelor cu centru este adevărată:

1. *pentru $\Delta \neq 0$ avem:*

   (a) *dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o* ***hiperbolă****;*

   (b) *dacă $\delta > 0$, atunci avem:*

      i. *dacă $I \cdot \Delta < 0$, atunci conica Γ este o* ***elipsă****;*

      ii. *dacă $I \cdot \Delta > 0$, atunci conica Γ este o* ***mulţimea vidă****;*

2. *pentru $\Delta = 0$ avem:*

   (a) *dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o* ***reuniune de drepte concurente****;*

   (b) *dacă $\delta > 0$, atunci conica Γ este o* ***un punct****.*

Observaţia 1.5.3 *În cazul $\Delta \neq 0$ şi $\delta > 0$ nu putem avea $I \cdot \Delta = 0$.*

1.6 Reducerea la forma canonică a conicelor fără centru ($\delta = 0$)

Fie $\Gamma : g(x, y) = 0$, unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

o conică cu $\delta = 0$. Reaminitm că, în acest caz, sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

este ori incompatibil ori admite o infinitate de soluţii. Cu alte cuvinte, conica Γ ori nu admite niciun centru de simetrie ori admite o dreaptă de centre de simetrie.

Definiţia 1.6.1 *O conică $\Gamma : g(x, y) = 0$, unde $\delta = 0$, se numeşte* ***conică fără centru****.*

Teorema 1.6.2 *Dacă $\Gamma : g(x, y) = 0$ este o conică fără centru, atunci conica Γ poate reprezenta în plan una dintre următoarele figuri geometrice: o* ***parabolă****, o* ***reuniune de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *sau* ***mulţimea vidă****.*

Demonstraţie. Să considerăm din nou forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

unde $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Matricea formei pătratice φ în sistemul de coordonate xOy este evident matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

unde $\det A = \delta = 0$. Mai mult, valorile proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda = 0,$$

adică valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I \neq 0$. Dacă notăm acum cu

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I \neq 0$, şi efectuăm rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

verifică egalitatea

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

atunci ecuaţia conicei Γ se rescrie sub forma

$$\Gamma : I(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Evident, matricea conicei Γ în sistemul de coordonate $x'Oy'$ este matricea simetrică

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Deoarece trecerea de la sistemul de coordonate xOy la sistemul de coordonate $x'Oy'$ s-a făcut printr-o rotaţie, deducem că invariantul Δ are valoarea

$$\Delta = -I(a'_{13})^2,$$

adică avem

$$a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}.$$

Vom considera în continuare următoarele cazuri posibile:

1. Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $a'_{13} \neq 0$. În această situaţie, efectuăm o translaţie a sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe XCY, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0, \end{cases}$$

unde punctul $C(x_0, y_0)$ este ales astfel încât ecuaţia conicei Γ să capete o formă cât mai simplă. Deoarece efectuând o asemenea translaţie ecuaţia conicei Γ se reduce la ecuaţia

$$\Gamma : IY^2 + 2a'_{13}X + 2(Iy_0 + a'_{23})Y + Iy_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33} = 0,$$

determinăm punctul $C(x_0, y_0)$ impunând condiţiile

$$\begin{cases} Iy_0 + a'_{23} = 0 \\ Iy_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33} = 0. \end{cases}$$

Este evident că acest sistem are o soluţia unică

$$\begin{cases} y_0 = -\dfrac{a'_{23}}{I} \\ x_0 = -\dfrac{Iy_0^2 + 2a'_{23}y_0 + a'_{33}}{2a'_{13}} \end{cases}$$

şi deci ecuaţia conicei Γ se poate scrie sub forma canonică

$$\Gamma : Y^2 = 2pX,$$

unde

$$p = -\frac{2a'_{13}}{I} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Prin urmare, conica Γ este o *parabolă* cu vârful în punctul $C(x_0, y_0)$ şi axa de simetrie CX.

2. Dacă $\Delta = 0$, atunci $a'_{13} = 0$. În această situaţie, ecuaţia conicei Γ se scrie sub forma

$$\Gamma : I(y')^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în y'. Fie k_1 şi k_2 rădăcinile reale sau complexe ale acestui polinom.

   (a) Dacă $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ şi $k_1 \neq k_2$, atunci forma canonică a ecuaţiei conicei Γ este

$$\Gamma : \left(y' + \frac{a'_{23}}{I}\right)^2 + \frac{a'_{33}}{I} - \frac{(a'_{23})^2}{I^2} = 0,$$

   unde

$$\frac{a'_{33}}{I} - \frac{(a'_{23})^2}{I^2} < 0.$$

Efectuând atunci translaţia

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{I} \end{cases}$$

şi utilizând notaţia

$$k = \sqrt{\frac{(a'_{23})^2}{I^2} - \frac{a'_{33}}{I}},$$

expresia canonică a ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : Y^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow (Y-k)(Y+k) = 0,$$

unde $k \neq 0$. Prin urmare, conica Γ este *reuniunea* $D_1 \cup D_2$ *a două drepte paralele*, unde

$$D_1 : Y - k = 0 \text{ şi } D_2 : Y + k = 0.$$

(b) Dacă $k_1 = k_2 \in \mathbb{R}$, atunci, după efectuarea translaţiei definite la punctul 1., expresia canonică a ecuaţiei conicei Γ devine

$$\Gamma : Y^2 = 0.$$

Prin urmare, conica Γ este *reuniunea* $D_1 \cup D_2$ *a două drepte confundate*, unde

$$D_1 = D_2 : Y = 0.$$

(c) Dacă $k_1, k_2 \notin \mathbb{R}$, atunci, evident, ecuaţia conicei Γ caracterizează *mulţimea vidă.*

■

Corolarul 1.6.3 (Clasificarea conicelor fără centru) *Să considerăm că*

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

este o conică fără centru ($\delta = 0$). Atunci, următoarea clasificare a conicelor fără centru este adevărată:

1. *Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica Γ este o **parabolă**;*
2. *Dacă $\Delta = 0$, atunci conica Γ este o **reuniune de drepte paralele** sau **confundate** sau **mulţimea vidă**.*

1.7 Clasificarea conicelor. Reprezentare grafică

Să considerăm că $\Gamma : g(x, y) = 0$, unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0,$$

este o conică şi să presupunem că Δ, δ şi I sunt invarianţii metrici ai conicei Γ.

După cum am observat în secţiunile precedente invarianţii metrici Δ, δ şi I ne dau informaţii în ceea ce priveşte clasificarea conicei Γ. Din această perspectivă vom spune că invariantul Δ ne oferă informaţii despre *natura* conicei Γ, în timp ce invariantul δ ne oferă informaţii despre *genul* conicei Γ. Atunci, pentru o mai clară sintetizare a rezultatelor din secţiunile precedente, vom utiliza următoarea terminologie naturală:

1. Conica Γ pentru care $\Delta \neq 0$ (elipsă, hiperbolă, parabolă, mulţime vidă) se numeşte conică *nedegenerată*.

2. Conica Γ pentru care $\Delta = 0$ (reuniune de drepte concurente sau paralele sau confundate, un punct, mulţime vidă) se numeşte conică *degenerată*.

3. Conica Γ pentru care $\delta > 0$ (elipsă, un punct, mulţime vidă) se numeşte conică de *tip eliptic*.

4. Conica Γ pentru care $\delta < 0$ (hiperbolă, reuniune de drepte concurente) se numeşte conică de *tip hiperbolic*.

5. Conica Γ pentru care $\delta = 0$ (parabolă, reuniune de drepte paralele sau confundate, mulţime vidă) se numeşte conică de *tip parabolic*.

În acest context, folosind invarianţii metrici Δ, δ şi I ai unei conice Γ, suntem în măsură să dăm următoarea *clasificare izometrică* a conicelor:

1. Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica Γ este o conică *nedegenerată*;

   (a) Dacă $\delta > 0$, atunci conica Γ este:

      i. o *elipsă* pentru $I\Delta < 0$;

      ii. *mulţimea vidă* pentru $I\Delta > 0$;

   (b) Dacă $\delta = 0$, atunci conica Γ este o *parabolă*;

   (c) Dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o *hiperbolă*;

2. Dacă $\Delta = 0$, atunci conica Γ este o conică *degenerată*;

   (a) Dacă $\delta > 0$, atunci conica Γ este o *un punct*;

   (b) Dacă $\delta = 0$, atunci conica Γ este o *reuniune de drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*;

   (c) Dacă $\delta < 0$, atunci conica Γ este o *reuniune de drepte concurente*.

Mai mult, în urma studiilor făcute în secţiunile precedente, putem scoate în evidenţă următorul

Algoritm de reprezentare grafică a conicei Γ
-Metoda roto-translaţiei-

1. Se precizează natura şi genul conicei Γ după valorile invarianţilor metrici Δ, δ şi I.

2. Se asociază conicei Γ forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

şi se scrie matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice φ.

3. Se calculează valorile proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A ca rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (*ecuaţia seculară*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

4. Se calculează subspaţiile proprii

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

şi

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

corespunzătoare valorilor proprii λ_1 şi λ_2 ale matricii A.

5. Printr-o eventuală renumerotare, se aleg

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2) \text{ şi } \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 astfel încât

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

unde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

6. Se efectuează rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

în urma căreia ecuaţia conicei Γ devine

$$\Gamma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

unde a'_{13}, a'_{23}, $a'_{33} \in \mathbb{R}$.

7. Forţând factorii comuni λ_1 şi λ_2 (dacă este cazul) şi restrângând pătratele descompuse, se rescrie ecuaţia conicei Γ sub forma

$$\Gamma : \lambda_1(x' + x_0)^2 + \lambda_2(y' + y_0)^2 + a = 0,$$

unde x_0, y_0, $a \in \mathbb{R}$.

8. Se efectuează translaţia
$$\begin{cases} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \end{cases}$$
şi se scrie ecuaţia canonică
$$\Gamma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a = 0.$$

9. Se trasează sistemul iniţial de axe xOy şi se efectuează rotaţia acestuia în sistemul de axe $x'Oy'$. Direcţiile şi sensurile axelor Ox' şi Oy' coincid cu direcţiile şi sensurile vectorilor proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$.

10. Se efectuează translaţia sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe XCY, unde punctul C are coordonatele $C(x_0, y_0)$.

11. Se reprezintă grafic ecuaţia canonică de la punctul (8) în ultimul sistem de axe XCY.

Observaţia 1.7.1 *În unele aplicaţii vom folosi notaţiile* $x'' = X$ *şi* $y'' = Y$.

Observaţia 1.7.2 *Dacă* $a_{12} = 0$*, atunci algoritmul de mai sus începe direct de la punctul (7), adică se efectuează doar o* ***translaţie****.*

Observaţia 1.7.3 *Dacă* $a'_{13} = a'_{23} = 0$*, atunci în algoritmul de mai sus se sar punctele (7), (8) şi (10), adică se efectuează doar o* ***rotaţie****.*

Observaţia 1.7.4 *Dacă în algoritmul de mai sus nu se sare nici un pas, atunci spunem că am aplicat* ***metoda roto-translaţiei****.*

Exemplul 1.7.5 *Să se precizeze natura şi genul conicei*
$$\Gamma : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$
Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$
Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*
$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81 \neq 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0 \ \text{şi} \ I = 10.$$
Deoarece avem
$$I\Delta = -810 < 0$$
rezultă că conica Γ *este o* ***elipsă****.*

Pentru a găsi forma canonică a elipsei Γ să considerăm forma pătratică

$$\varphi(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A este

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A sunt

$$\lambda_1 = 9 \text{ și } \lambda_2 = 1.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 9$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x+y=0 \right\} = \\ &= \{ (x,x) \mid x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \right\} = \\ &= \{ (-x,x) \mid x \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \text{ și } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\[2ex] y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ *se reduce la*

$$\Gamma : 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : 9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y', \end{cases}$$

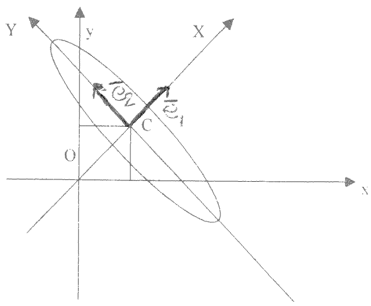
ecuaţia conicei Γ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Gamma : 9X^2 + Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \Gamma : \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unei elipse.

Graficul elipsei Γ *este reprezentat mai jos în sistemul de axe* XCY*, unde punctul* C *are coordonatele*

$$C(x' = \sqrt{2}, y' = 0) \Leftrightarrow C\,(x = 1, y = 1)\,.$$



Elipsa Γ

Este evident că elipsa Γ *are axele de simetrie* $D_1 = CY$ *şi* $D_2 = CX$ *de ecuaţii*

$$D_1 : X = 0 \text{ şi } D_2 : Y = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y'*, de ecuaţii*

$$D_1 : x' - \sqrt{2} = 0 \text{ şi } D_2 : y' = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y), \end{cases}$$

rezultă că axele de simetrie D_1 *şi* D_2 *ale elipsei* Γ *au ecuaţiile*

$$D_1 : x + y - 2 = 0 \text{ şi } D_2 : y - x = 0.$$

Exemplul 1.7.6 *Să se precizeze natura şi genul conicei*

$$\Gamma : 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,\ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \text{ şi } I = 3,$$

adică conica Γ *este o* ***hiperbolă***.

Pentru a găsi forma canonică a hiperbolei Γ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y) = 3x^2 - 4xy$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = -1 \text{ şi } \lambda_2 = 4.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = -1$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + y = 0 \right\} = \\ &= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 4$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\} = \\ &= \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 *şi* λ_2 *sunt*

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \text{ şi } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = -1.$$

În acest context, renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$ *şi corespunzător* $\overline{e}_1' = \overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1$, *pentru a obţine matricea de rotaţie*

$$\mathcal{R}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

unde

$$\det \mathcal{R}' = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y' - x'), \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ *se reduce la*

$$\Gamma : 4(x')^2 - (y')^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : 4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

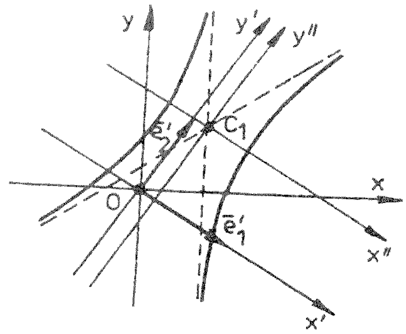
ecuaţia conicei Γ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Gamma : 4(x'')^2 - (y'')^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma : \frac{(x'')^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(y'')^2}{2} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unei hiperbole.

Graficul hiperbolei Γ *este reprezentat mai jos în sistemul de axe* $x''C_1y''$, *unde punctul* C_1 *are coordonatele*

$$C_1\left(x' = \frac{1}{\sqrt{5}}, y' = \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow C_1\left(x = 1, y = 1\right).$$



Hiperbola Γ

Este evident că hiperbola Γ *are axele de simetrie* $D_1 = C_1y''$ *şi* $D_2 = C_1x''$ *de ecuaţii*

$$D_1 : x'' = 0 \text{ şi } D_2 : y'' = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y'*, de ecuaţii*

$$D_1 : x' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \text{ şi } D_2 : y' - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y), \end{cases}$$

rezultă că axele de simetrie D_1 *şi* D_2 *ale hiperbolei* Γ *au ecuaţiile*

$$D_1 : 2x - y - 1 = 0 \text{ şi } D_2 : x + 2y - 3 = 0.$$

Mai mult, hiperbola Γ *admite asimptotele* d_1 *şi* d_2 *(reprezentate punctat) de ecuaţii*

$$d_{1,2} : y'' = \pm 2x''$$

sau, la nivel de coordonate x' *şi* y'*, de ecuaţii*

$$d_1 : -2x' + y' - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \text{ şi } d_2 : 2x' + y' - \sqrt{5} = 0$$

sau, la nivel de coordonate x *şi* y*, de ecuaţii*

$$d_1 : -3x + 4y - 1 = 0 \text{ şi } d_2 : x - 1 = 0.$$

Exemplul 1.7.7 *Să se precizeze natura şi genul conicei*

$$\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Mai mult, utilizând metoda roto-translaţiei, să se reducă ecuaţia conicei Γ *la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica* Γ.

Matricea conicei Γ *este matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci, invarianţii metrici ai conicei Γ *sunt*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100 \neq 0,\ \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } I = 10,$$

adică conica Γ *este o* ***parabolă***.

Pentru a găsi forma canonică a parabolei Γ *să considerăm forma pătratică*

$$\varphi(x, y) = 9x^2 - 6xy + y^2$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A *este*

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A *sunt*

$$\lambda_1 = 0 \text{ şi } \lambda_2 = 10.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 0$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3x + y = 0 \right\} = \\ &= \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

iar subspaţiul propriu V_{λ_2} *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 10$ *este*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0 \right\} = \\ &= \{(-3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1 *şi* λ_2 *sunt*

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \text{ şi } \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'), \end{cases}$$

ecuaţia conicei Γ *se reduce la*

$$\Gamma : 10(y')^2 + \frac{20}{\sqrt{10}}x' - \frac{60}{\sqrt{10}}y' = 0 \Leftrightarrow \Gamma : (y')^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Gamma : \left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{9}{10} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \end{cases}$$

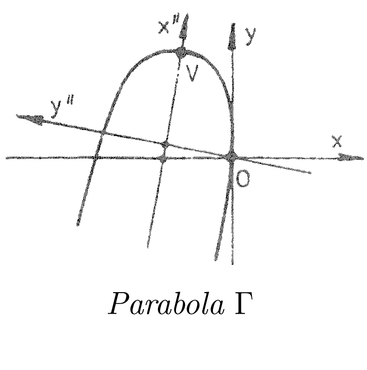
ecuaţia conicei Γ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Gamma : (y'')^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' + \frac{9}{10},$$

adică la ecuaţia unei parabole.

Graficul parabolei Γ *este reprezentat mai jos în sistemul de axe* $x''Cy''$*, unde punctul* C *are coordonatele*

$$C\left(x' = 0, y' = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \Leftrightarrow C\left(x = -\frac{9}{10}, y = \frac{3}{10}\right).$$



Parabola Γ

Este evident că parabola Γ *are vârful în punctul* V *de coordonate*

$$V\left(x'' = \frac{9}{2\sqrt{10}}, y'' = 0\right) \Leftrightarrow V\left(x' = \frac{9}{2\sqrt{10}}, y' = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \Leftrightarrow V\left(x = -\frac{9}{20}, y = \frac{3}{4}\right)$$

şi axa de simetrie $D = Cx''$ *de ecuaţie*

$$D : y'' = 0$$

sau, la nivel de coordonate x' şi y', de ecuaţie

$$D : y' - \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.$$

Deoarece avem relaţiile

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y), \end{cases}$$

rezultă că axa de simetrie D a parabolei Γ are ecuaţia

$$D : -3x + y - 3 = 0.$$

1.8 Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul pe dreapta

$$d : x - 2y + 1 = 0,$$

tangent axei Ox şi care trece prin punctul $A(0, 1)$.

Rezolvare. Să presupunem ca cercul căutat are raza $r > 0$ şi centrul C de coordonate (α, β). Ecuaţia cercului este atunci

$$\mathcal{C} : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Cercul $\mathcal{C}$ fiind tangent axei Ox de ecuaţie $y = 0$, deducem că

$$d(C, Ox) = |\beta| = r.$$

Deoarece $C \in d$ şi $A \in \mathcal{C}$, deducem că

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha^2 + (1 - \beta)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ \alpha^2 - 2\beta + 1 = 0. \end{cases}$$

Coordonatele centrului cercului sunt soluţiile $C_1(0, 1/2)$ sau $C_2(1, 1)$. Aceasta înseamnă că avem de-a face cu două cercuri de raze $r_1 = 1/2$ şi $r_2 = 1$. Ecuaţiile celor două cercuri găsite sunt

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{C}_2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

■

2. Să se determine locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că tangentele la elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0,$$

prin aceste puncte, sunt perpendiculare.

Rezolvare. Fie $M(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, un punct variabil în plan, care verifică proprietatea cerută de problemă. Fascicolul de drepte care trec prin M este descris de ecuaţiile $d_m : y-\beta = m(x-\alpha)$, $m\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. O dreaptă d_m a fascicolului este tangentă la elipsă dacă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1=0 \\ y-\beta = m(x-\alpha) \end{cases}$$

are o singură soluţie (dreapta şi elipsa au un singur punct comun). Dacă scoatem y din a doua ecuaţie şi introducem în prima, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea, al cărei discriminant trebuie să se anuleze. Cu alte cuvinte, în urma calculelor, sistemul are singură soluţie dacă

$$(4-\alpha^2)m^2+2\alpha\beta m+9-\beta^2=0.$$

În condiţiile în care discriminantul ultimei ecuaţii

$$\Delta = 4(9\alpha^2+4\beta^2-36)$$

este strict pozitiv, găsim două soluţii distincte m_1 şi m_2 ale ultimei ecuaţii, soluţii care reprezintă pantele celor două tangente prin M, la elipsă. Punând condiţia ca tangentele d_{m_1} şi d_{m_2} să fie perpendiculare, obţinem relaţia $m_1m_2+1=0$. Folosind relaţiile lui Viéte, deducem că $\alpha^2+\beta^2=13$. Cu alte cuvinte, locul geometric descris de punctul M reprezintă un cerc centrat în originea $O(0,0)$ şi de rază $R=\sqrt{13}$. ∎

3. Să se arate că tangentele la o hiperbolă formează cu asimptotele triunghiuri de arie constantă.

   Rezolvare. Fie $M(a\cosh t, b\sinh t)$, $t\in\mathbb{R}$, un punct mobil al hiperbolei de ecuaţie

$$H : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad a,b>0,$$

unde

$$\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \text{ şi } \sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

Ecuaţia tangentei în M la hiperbolă se obţine prin dedublare

$$T_MH : \frac{x\cosh t}{a}-\frac{y\sinh t}{b}-1=0.$$

Punctele ei de intersecţie cu asimptotele

$$d_{1,2} : y = \pm\frac{b}{a}x$$

sunt punctele $M_1(ae^t, be^t)$ şi $M_2(ae^{-t}, -be^{-t})$. Atunci, aria triunghiului ΔOM_1M_2 este

$$\mathcal{A}_{\Delta OM_1M_2} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ae^t & be^t & 1 \\ ae^{-t} & -be^{-t} & 1 \end{vmatrix} = ab = \text{constant}.$$

∎

4. Să se calculeze invarianţii ortogonali şi să se scrie forma canonică a conicelor:

(a) $\Gamma_1 : 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 16x + 4y - 22 = 0$;
(b) $\Gamma_2 : 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0$;
(c) $\Gamma_3 : x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0$.

Rezolvare. (a) Matricea conicei Γ_1 este matricea simetrică

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & -22 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, invarianţii conicei Γ_1 sunt:

$$\Delta = \det A_1 = -216, \ \delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \text{ şi } I = a_{11} + a_{22} = 7.$$

Deoarece $\delta \neq 0$, rezultă că forma canonică a conicei Γ_1 se descrie după formula

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde $\lambda_{1,2}$ sunt valorile proprii ale matricii $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. În concluzie, ecuaţia redusă a conicei este elipsa

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{36} - 1 = 0.$$

(b) Matricea conicei Γ_2 este matricea simetrică

$$A_2 = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 1 \\ -12 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

iar invarianţii sunt $\Delta = -2000$, $\delta = -100$ şi $I = 15$. Ecuaţia redusă a conicei este hiperbola

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} + 1 = 0.$$

(c) Matricea conicei Γ_3 este matricea simetrică

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

iar invarianţii sunt $\Delta = -4$, $\delta = 0$ şi $I = 2$. Deoarece $\delta = 0$, forma canonică a conicei Γ_3 se descrie după formula

$$Y^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}} X.$$

În concluzie, ecuaţia redusă a conicei Γ_3 este o parabolă, care are o ecuaţie de forma $Y^2 = \sqrt{2}X$ sau $Y^2 = -\sqrt{2}X$. ■

5. Să se stabilească natura şi genul conicelor:

   (a) $\Gamma_1 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0;$
   (b) $\Gamma_2 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0;$
   (c) $\Gamma_3 : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

   Rezolvare. (a) Din cauză că $\Delta = -81 \neq 0$, avem de-a face cu o conică nedegenerată. Invariantul $\delta = 9$ fiind strict pozitiv, rezultă că Γ_1 este de gen elipsă. Deoarece avem $I \cdot \Delta = -810 < 0$, rezultă că Γ_1 este o elipsă.

   (b) Deoarece $\Delta = -324 \neq 0$ şi $\delta = -9 < 0$, rezultă că Γ_2 este o hiperbolă.

   (c) Având $\Delta = -225 \neq 0$ şi $\delta = 0$, înseamnă că Γ_3 este o parabolă. ■

6. Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura şi genul următoarele conice, punându-se în evidenţă roto-translaţiile plane efectuate:

   (a) $\Gamma_1 : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0;$
   (b) $\Gamma_2 : 2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0;$
   (c) $\Gamma_3 : 2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0;$
   (d) $\Gamma_4 : 8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0;$
   (e) $\Gamma_5 : 2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0.$

   Rezolvare. (a) Utilizând metoda vectorilor şi valorilor proprii (a transformărilor ortogonale), reducem la forma canonică forma pătratică

$$q_1(x, y) = 9x^2 - 24xy + 16y^2,$$

asociată conicei Γ_1. Rezolvând ecuaţia seculară

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0,$$

găsim valorile proprii simple $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = 25$. Baze ortonormate în subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$B_1 = \left\{ \overline{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\} \text{ şi } B_2 = \left\{ \overline{e}_2 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\}.$$

Acestea produc schimbarea de coordonate (rotaţia directă, de determinant pozitiv, egal cu unu)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(3x' + 4y') \\ y = \dfrac{1}{5}(-4x' + 3y'). \end{cases}$$

Înlocuind în expresia care defineşte conica Γ_1 coordonatele x şi y cu expresiile din formulele de rotaţie, în urma calculelor, găsim

$$\Gamma_1 : 25\,(x')^2 - 20x' + 5y' + 4 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_1 : 25\left[(x')^2 - \frac{4}{5}x' \right] + 5y' + 4 = 0.$$

Efectuând prin metoda formării de pătrate translaţia sistemului de axe $x'Oy'$ în sistemul de axe $x''O'y''$, unde $O'(2/5,0)$, translaţie definită de relaţiile

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{2}{5} \\ y'' = y', \end{cases}$$

deducem că conica Γ_1 este parabola $y'' = -\left(x''\right)^2/5$.

(b) Forma pătratică $q_2(x,y) = 2x^2 - 2\sqrt{3}xy$ are matricea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrici sunt $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = -1$. Bazele ortonormate a subspaţiilor proprii asociate sunt

$$B_1 = \left\{\overline{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} \text{ şi } B_2 = \left\{\overline{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$

care conduc la rotaţia directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în expresia lui Γ_2 pe x şi y din formulele

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') \\ y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'), \end{cases}$$

în urma calculelor, obţinem hiperbola

$$\Gamma_2 : -\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_2 : \frac{\left(x'\right)^2}{9} - \frac{\left(y'\right)^2}{3} = 1.$$

(c) Utilizând metoda transformărilor ortogonale, forma pătratică

$$q_3(x,y) = 2x^2 + 6xy + 10y^2$$

se reduce la forma canonică în baza ortonormată

$$B = \left\{\overline{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \overline{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

obţinută prin reuniunea bazelor ortonormate de vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 11$ şi $\lambda_2 = 1$. În concluzie, schimbările de coordonate ale rotaţiei directe sunt

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'). \end{cases}$$

În urma calculelor, obţinem $\Gamma_3 : 11\,(x')^2 + (y')^2 - 121 = 0$. Cu alte cuvinte, conica Γ_3 este elipsa
$$\Gamma_3 : \frac{(x')^2}{11} + \frac{(y')^2}{121} = 1.$$
(d) Deoarece valorile proprii ale matricii formei pătratice asociate conicei Γ_4 sunt $\lambda_1 = 9$ şi $\lambda_2 = -1$ iar bazele ortonormate sunt
$$B_1 = \left\{\overline{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\} \text{ şi } B_2 = \left\{\overline{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\},$$
rezultă că formulele de rotaţie directă sunt
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y'). \end{cases}$$
Acestea conduc la conica
$$\Gamma_4 : 9\,(y')^2 - (x')^2 + \frac{21}{\sqrt{10}}y' - \frac{3}{\sqrt{10}}x' + 1 = 0$$
Formând pătrate perfecte în x' şi y' şi folosind translaţia
$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{3}{2\sqrt{10}} \\ y'' = y' + \dfrac{7}{6\sqrt{10}}, \end{cases}$$
deducem că forma canonică a conicei este
$$\Gamma_4 : 9\,(y'')^2 - (x'')^2 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_4 : (3y'' - x'')(3y'' + x'') = 0.$$
Cu alte cuvinte, conica Γ_4 este o conică degenerată, reprezentând reuniunea a două drepte concurente: $d_1 : 3y'' - x'' = 0$ şi $d_2 : 3y'' + x'' = 0$. În coordonatele iniţiale x şi y aceste drepte au ecuaţiile: $d_1 : 4x + 3y + 1 = 0$ şi $d_2 : x = -1/2$.

(e) Deoarece forma pătratică $q_5(x, y) = 2x^2 + y^2$ a conicei Γ_5 este deja în formă canonică, rezultă că forma canonică a conicei Γ_5 se obţine doar printr-o translaţie, şi anume
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3. \end{cases}$$
Ecuaţiile translaţiei se deduc în urma formării de pătrate
$$\Gamma_5 : 2[(x + 1)^2 - 1] + (y + 3)^2 - 9 + 12 = 0.$$
În concluzie, conica Γ_5 este o mulţime vidă sau, altfel spus, o elipsă imaginară descrisă de ecuaţia
$$\Gamma_5 : 2\,(x')^2 + (y')^2 + 1 = 0.$$
■

7. Să se arate că locul geometric al centrelor conicelor care trec prin punctele $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,1)$ şi $D(1,2)$ este o hiperbolă. Să se determine coordonatele centrului acestei hiperbole.

   Rezolvare. Folosind formula care determină ecuaţia unei drepte ce trece prin două puncte, deducem că ecuaţiile carteziene ale dreptelor AB, CD, AD şi BC sunt

$$AB : y = 0,\ CD : x - y + 1 = 0,\ AD : y - 2x = 0,\ BC : x + 2y - 2 = 0$$

   iar ecuaţia fascicolului de conice care circumscriu patrulaterul $ABCD$ este

$$\Gamma_\lambda : (AB)(CD) + \lambda(AD)(BC) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma_\lambda : y(x - y + 1) + \lambda(y - 2x)(x + 2y - 2) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma_\lambda : -2\lambda x^2 + (1 - 3\lambda)xy + (2\lambda - 1)y^2 + (1 - 2\lambda)y + 4\lambda x = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Coordonatele centrelor conicelor din fascicolul Γ_λ verifică sistemul de ecuaţii liniare obţinut prin derivări parţiale

$$\begin{cases} -4\lambda x + (1 - 3\lambda)y = -4\lambda \\ (1 - 3\lambda)x + 2(2\lambda - 1)y = 2\lambda - 1. \end{cases}$$

   Pentru a determina locul geometric cerut de problemă nu este însă necesară rezolvarea sistemului ci doar eliminarea parmetrului λ, care conduce la relaţia de legătură între coordonatele x şi y ale centrelor. Prin urmare, eliminând parametrul λ din sistemul de mai sus, deducem că x şi y verifică ecuaţia conicei

$$\Gamma : 4x^2 - 8xy - 2y^2 + 9y - 4 = 0.$$

   Invarianţii ortogonali ai conicei Γ sunt $\Delta = 15 \neq 0$ şi $\delta = -24 < 0$. Cu alte cuvinte, locul geometric descris de coordonatele centrelor conicelor care trec prin punctele A, B, C şi D este o hiperbolă.

   Coordonatele centrului acestei hiperbole sunt $(3/4, 3/4)$ şi se obţin rezolvând sistemul liniar

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 8x + 4y = 9. \end{cases}$$

   ■

8. Fie punctele $A(-1,1)$, $B(-1,-1)$ şi $C(0,0)$. Să se scrie fascicolul de conice circumscrise triunghiului ABC.

   Rezolvare. Ecuaţiile laturilor triunghiului ABC sunt:

$$AB : x + 1 = 0, \quad AC : x + y = 0, \quad BC : x - y = 0.$$

   În concluzie, ecuaţia fascicolului de conice circumscrise triunghiului ABC este

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (AB)(AC) + \lambda(AB)(BC) + \mu(AC)(BC) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (x + 1)(x + y) + \lambda(x - y)(x + 1) + \mu(x + y)(x - y) = 0,$$

   unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

9. Să se scrie ecuaţia generală a conicei care trece prin punctele $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C(0,1)$, $D(0,4)$ şi $E(12,1)$.

   Rezolvare. Ecuaţiile carteziene ale dreptelor AB, CD, AD şi BC sunt

   $$AB : y = 0,\ CD : x = 0,\ AD : 2x + y - 4 = 0,\ BC : x + 3y - 3 = 0$$

   iar ecuaţia fascicolului de conice care circumscriu patrulaterul $ABCD$ este

   $$\Gamma_\lambda : xy + \lambda(2x + y - 4)(x + 3y - 3) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Punând condiţia $E \in \Gamma_\lambda$, obţinem

   $$12 + 21 \cdot 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{21}.$$

   În concluzie, ecuaţia conicei care trece prin punctele A, B, C, D şi E este

   $$\Gamma_{\lambda=-1/21} : 2x^2 - 14xy + 3y^2 - 10x - 15y + 12 = 0.$$

   ■

10. Să se determine tangentele la conica

    $$\Gamma : 2x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 7 = 0,$$

    paralele cu prima bisectoare.

    Rezolvare. Deoarece ecuaţia primei bisectoare este $x = y$, rezultă că ecuaţia fascicolului de drepte paralele cu prima bisectoare este $x - y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Punând condiţia ca o dreaptă a acestui fascicol să aibă un singur punct comun cu conica Γ, rezultă că sistemul de ecuaţii

    $$\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

    trebuie să aibă o singură soluţie. Scoţând x din prima ecuaţie şi introducând în a doua ecuaţie, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

    $$y^2 - 2y - (2\lambda^2 + 4\lambda - 7) = 0,$$

    al cărei discriminant trebuie să se anuleze. Se obţine $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -3$. ■

1.9 Probleme propuse

1. Fie punctele $A(2,3)$, $B(-2,-1)$, $C(4,1)$. Să se scrie ecuaţiile cercurilor înscris şi circumscris triunghiului ABC. Să se determine tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC, care sunt paralele cu latura BC.

   R. Triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A şi are aria $S = 8$. Prin urmare, raza cercului înscris este $r = 3\sqrt{2} - \sqrt{10}$. Punând condiţia ca centrul cercului înscris I să se afle la distanţa r de fiecare latură, găsim coordonatele $I(2, -3 + 2\sqrt{5})$. Centrul cercului circumscris O se află la mijlocul ipotenuzei BC, adică are coordonatele $O(1,0)$. Raza cercului circumscris este $R = \sqrt{10}$. Tangentele căutate au ecuaţiile $x - 3y + 9 = 0$ şi $x - 3y - 11 = 0$.

2. Fie elipsa $E : x^2 + 2y^2 = 4$ şi cercul C care are ca diametru axa mare a elipsei. O semidreaptă verticală variabilă $x = \lambda$, $\lambda \in (-2, 2)$, $y > 0$, intersectează elipsa E în P şi cercul C în Q. Să se determine locul geometric al punctului de intersecţie dintre OQ şi FP, unde O este originea axelor iar F este focarul de abscisă pozitivă al elipsei E.

   R. Locul geometric căutat este semi-elipsa
$$2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2}+1)y^2 = 3 + 2\sqrt{2},\ y > 0.$$

3. Să se determine pe hiperbola $H : 4x^2 - 9y^2 = 36$ punctul situat la cea mai mică distanţă de dreapta $d : 2x - y + 2 = 0$.

   R. Considerăm un punct arbitrar $P(3\cosh t, 2\sinh t)$ pe ramura din dreapta a hiperbolei H. Minimul distanţei de la punctul P la dreapta d se gaseşte minimizând funcţia $f(t) = 2\left(e^t + 2e^{-t} + 1\right)/\sqrt{5}$. Obţinem valoarea $t = \ln\sqrt{2}$, adică avem punctul de coordonate $P\left(9/(2\sqrt{2}), 1/\sqrt{2}\right)$. Analog se tratează şi ramura din stânga a hiperbolei şi găsim punctul $Q\left(-9/(2\sqrt{2}), -1/\sqrt{2}\right)$. Punctul căutat (care dă minimul distanţei) este punctul Q.

4. Să se discute natura şi genul conicelor:

   (a) $\Gamma_1 : 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$;
   (b) $\Gamma_2 : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$;
   (c) $\Gamma_3 : 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$.

   R. (a) Hiperbolă. (b) Parabolă. (c) Elipsă.

5. Să se discute natura şi genul conicelor fascicolului
$$\Gamma_\lambda : x^2 + 4xy + y^2 + 2\lambda x + 4y + \lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$
   şi să se traseze graficul conicelor degenerate ale fascicolului.

   R. Pentru $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$ conica nedegenerată Γ_λ este o hiperbolă. Pentru $\lambda = 1$ conica degenerată Γ este reuniunea de drepte concurente
$$\Gamma_{\lambda=1} : \left[x + (2-\sqrt{3})y + 1\right] \cdot \left[x + (2+\sqrt{3})y + 1\right] = 0$$
   iar pentru $\lambda = 4$ conica degenerată Γ este reuniunea de drepte concurente
$$\Gamma_{\lambda=4} : \left[x + (2-\sqrt{3})y + 4 - 2\sqrt{3}\right] \cdot \left[x + (2+\sqrt{3})y + 4 + 2\sqrt{3}\right] = 0.$$

6. Fie familia de conice
$$\Gamma_\lambda : 3x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Să se determine locul geometric al centrelor conicelor acestui fascicol şi să se reprezinte grafic acest loc geometric.

   R. Locul geometric al centrelor este elipsa
$$\Gamma : 3x^2 + y^2 - x + 2y = 0 \Leftrightarrow \Gamma : 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{12}.$$

7. Să se determine centrul, axele de simetrie şi asimptotele conicei

$$\Gamma : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

R. Reducând conica la forma canonică, deducem că Γ este o hiperbolă cu centrul $C(3, -4)$. Ecuaţiile asimptotelor sunt $y + 4 = 0$ şi $4x + 3y = 0$. Ecuaţiile axelor de simetrie sunt $x + 2y + 5 = 0$ şi $-2x + y + 10 = 0$.

8. Să se scrie ecuaţia parabolei care trece prin punctele $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ şi care are ca axă dreapta $d : x + y + 1 = 0$.

R. Se scrie fascicolul de conice care trece prin punctele O, A şi simetricele acestora faţă de dreapta d. Punând condiţia ca conica să fie o parabolă ($\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$), găsim ecuaţia

$$\Gamma : x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0.$$

9. Să se determine axele de simetrie şi asimptotele pentru conica

$$\Gamma : 4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0.$$

R. Reducem conica la forma canonică şi găsim că Γ este o hiperbolă. Obţinem că axele de simetrie au ecuaţiile $2x + y - 3 = 0$ şi $x - 2y - 4 = 0$. Asimptotele au ecuaţiile $y + 1 = 0$ şi $4x - 3y - 11 = 0$.

10. Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura şi genul următoarelor conice, punându-se în evidenţă roto-translaţiile plane efectuate:

(a) $\Gamma_1 : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
(b) $\Gamma_2 : 7x^2 - 8xy + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$;
(c) $\Gamma_3 : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$;
(d) $\Gamma_4 : 2xy - 2y + 1 = 0$;
(e) $\Gamma_5 : 3x^2 - 4xy + 2x + 2y - 1 = 0$;
(f) $\Gamma_6 : x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 12y + 8 = 0$;
(g) $\Gamma_7 : 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$;
(h) $\Gamma_8 : x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 2 = 0$;
(i) $\Gamma_9 : 8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$.

R. (a) $\Gamma_1 : 2X^2 + Y^2 - 4 = 0$ – elipsă; $\mathcal{O}(-1, -1)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(b) $\Gamma_2 : 9Y^2 - X^2 + 4 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(-1, -2)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(c) $\Gamma_3 : 5Y^2 + \sqrt{10}X = 0$ – parabolă; $\mathcal{O}(-9/20, 33/20)$ – vârful; $3x - y + 3 = 0$ – axa de simetrie; $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(d) $\Gamma_4 : X^2 - Y^2 + 1 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(1,0)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(e) $\Gamma_5 : -X^2 + 4Y^2 + 3/4 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(1/2, 5/4)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(f) $\Gamma_6 : -X^2 + 3Y^2 - 1 = 0$ – hiperbolă; $\mathcal{O}(-3,0)$ – centrul; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(g) $\Gamma_7 : Y^2 = 0$ – drepte confundate; $2x+y-1=0$ – axa de simetrie (se identifică cu conica); $\mathcal{O}(2/5, 1/5)$ – originea sistemului de axe roto-translatat; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(h) $\Gamma_8 : Y^2 + 7/8 = 0$ – mulţimea vidă; $\mathcal{O}(-1/4, 1/4)$ – originea sistemului de axe roto-translatat; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

(i) $\Gamma_9 : 9Y^2 - X^2 = 0$ – reuniune de drepte concurente; $\mathcal{O}(-1/2, 1/3)$ – centrul (coincide cu punctul de intersecţie al dreptelor concurente); $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)$ – direcţiile axelor $\mathcal{O}X$ şi $\mathcal{O}Y$.

11. Să se determine ecuaţia conicei care trece prin punctele de intersecţie ale conicelor

$$\Gamma_1 : x^2 - xy - 2y^2 + x + y = 0,$$
$$\Gamma_2 : x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 4y = 0$$

şi prin punctul $A(1,2)$.

R. $\Gamma : -x^2 + xy + 2y^2 + 5x - 7y = 0$.

12. Să se reprezinte grafic locul geometric al centrelor conicelor din fascicolul circumscris patrulaterului determinat de punctele $A(0,-1)$, $B(0,1)$, $C(-2,0)$ şi $D(2,0)$.

R. Locul geometric al centrelor conicelor este dreapta $x + 2y = 0$.

13. Există conice nedegenerate circumscrise hexagonului $ABCDEF$, unde

$$A(1,0),\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$D(-1,0),\ E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ?$$

În caz afirmativ, să se scrie ecuaţiile acestor conice.

R. Există o singură conică, şi anume, cercul $x^2 + y^2 = 1$.

14. Determinaţi valorile parametrului real m care fac ca dreapta $d : y = mx$ să fie tangentă la conica
$$\Gamma : (x+y)^2 + 2 = \sqrt{2}(y-x).$$
R. $m_1 = -1/3$ şi $m_2 = -3$.

15. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica
$$\Gamma : 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0,$$
care trec prin punctul $P(3,4)$.

R. Avem două tangente: $x - 3 = 0$ şi $7x - 2y - 13 = 0$.

16. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica
$$\Gamma : x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0,$$
paralele cu dreapta $d : 3x + 3y - 5 = 0$.

R. Tangentele căutate au ecuaţiile $x + y - 1 = 0$ şi $3x + 3y + 13 = 0$.

17. Să se scrie ecuaţia conicei care trece prin punctele $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,1)$ şi $D(3,-1)$ şi pentru care dreapta d de ecuaţie $x - 2y = 0$ este tangentă în punctul A.

R. Scriem fascicolul de conice care trec prin punctele A, B, C şi D, şi punem condiţia ca dreapta d să fie tangentă în punctul A. Găsim conica
$$\Gamma : 3x^2 - 4xy - 4y^2 - 7x + 14y = 0.$$

18. Să se scrie fascicolul de conice circumscris triunghiului determinat de punctele $A(3,2)$, $B(-2,-1)$ şi $C(4,1)$.

R. Fascicolul de conice circumscris triunghiului $\triangle ABC$ este
$$\Gamma_{\lambda,\mu} : (3x - 5y + 1)(x + y - 5) + \lambda(3x - 5y + 1)(x - 3y - 1) +$$
$$+\mu(x + y - 5)(x - 3y - 1) = 0,$$
unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. CUADRICE

Cuadricele sau *suprafeţele algebrice de grad doi* reprezintă o clasă de suprafeţe în spaţiu, cu proprietăţi remarcabile, întâlnite în aplicaţii din diverse domenii. Acestea sunt caracterizate, într-un reper cartezian ortonormat din spaţiul E_3, printr-o ecuaţie de forma

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde funcţia $g(x, y, z)$ este o funcţie polinomială de grad doi în nedeterminatele x, y şi z. Din punct de vedere geometric, în acest capitol vom demostra că o cuadrică nu poate reprezenta în spaţiu decât una dintre următoarele figuri geometrice: *o sferă*, *un elipsoid*, *un hiperboloid cu o pânză* sau *două*, *un paraboloid eliptic* sau *hiperbolic*, *un con eliptic* sau *circular*, *un cilindru circular*, *eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic*, *o reuniune de plane secante*, *paralele* sau *confundate*, *o dreaptă*, *un punct* sau *mulţimea vidă*.

2.1 Cuadrice pe ecuații reduse

Vom prezenta în această secţiune caracterizările algebrice şi principalele proprietăţi geometrice ale cuadricelor, studiate în repere carteziene ortonormate alese convenabil, după fiecare caz în parte. Fixăm pentru început reperul ortonormat

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

în spaţiul tridimensional al geometriei euclidiene E_3, adică fixăm în E_3 un sistem ortogonal de axe (coordonate) $Oxyz$.

2.1.1 Sfera

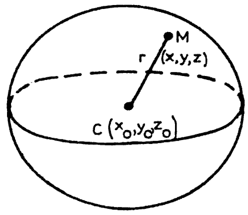
Definiţia 2.1.2 *Se numeşte* ***sferă de centru*** $C(x_0, y_0, z_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$ *mulţimea* (S) *a punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *care verifică relaţia*

$$d(M, C) = r.$$

Observaţia 2.1.3 *Este evident că mulţimea punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *care aparţin sferei* (S) *de centru* $C(x_0, y_0, z_0)$ *şi de rază* $r > 0$ *satisface ecuaţia de grad doi*

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

numită ***ecuaţia carteziană implicită a sferei de centru*** $C(x_0, y_0, z_0)$ ***şi de rază*** $r > 0$.



Sfera (S)

Dezvoltând pătratele în ecuaţia carteziană implicită a sferei (S), obţinem ecuaţia

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0,$$

care ne sugerează studiul geometric al ecuaţiei de gradul doi (aceasta este ecuaţie de cuadrică) de forma

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Deoarece ecuaţia cuadricei Σ se transcrie sub forma

$$\Sigma : (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = \rho,$$

unde $\rho = a^2 + b^2 + c^2 - d$, rezultă că avem următoarele situaţii:

1. Dacă $\rho > 0$, atunci mulţimea Σ este o sferă de centru $C(x_0, y_0, z_0)$, unde $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, $z_0 = -c$, şi de rază $r = \sqrt{\rho}$;
2. Dacă $\rho = 0$, atunci $\Sigma = \{(-a, -b, -c)\}$;
3. Dacă $\rho < 0$, atunci $\Sigma = \{\emptyset\}$.

Definiţia 2.1.4 *Ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

unde

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0,$$

se numeşte ***ecuaţia carteziană generală a sferei.***

2.1.2 Elipsoidul

Definiţia 2.1.3 *Cuadrica* $(E) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***elipsoid.***

Este evident că putem determina forma elipsoidului (E) studiind intersecţiile acestuia cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$. Astfel, observăm că intersecţiile elipsoidului (E) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{\alpha^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \alpha, \end{cases}$$

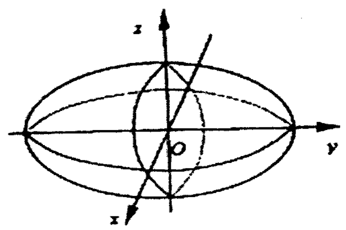
$$(E_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(E_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

   pentru $|\alpha| < c$, $|\beta| < b$ şi $|\gamma| < a$;

2. *Un punct* pentru $|\alpha| = c$ sau $|\beta| = b$ sau $|\gamma| = a$;

3. *Mulţimea vidă* pentru $|\alpha| > c$, $|\beta| > b$ şi $|\gamma| > a$.



Elipsoidul (E)

Planele de coordonate xOy, xOz şi yOz sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului (E) deoarece schimbând pe rând pe x în $-x$, pe y în $-y$ şi pe z în $-z$ ecuaţia elipsoidului (E) nu se modifică. Mai mult, deoarece schimbările tripletului (x, y, z) respectiv în $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$ nu modifică ecuaţia elipsoidului (E), rezultă că axele de coordonate Ox, Oy şi Oz sunt *axe de simetrie* ale elipsoidului (E). Prin urmare, originea O este *centru de simetrie* al elipsoidului (E).

Punctele în care axele de simetrie înţeapă elipsoidul (E) se numesc *vârfurile* elipsoidului (E).

Observaţia 2.1.4 *În cazul în care avem $a = b = c = r > 0$ elipsoidul (E) devine o sferă (S) centrată în originea $O(0, 0, 0)$ şi de rază r care are ecuaţia*

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Observaţia 2.1.5 *Elipsoidul este utilizat ca suprafaţă de referinţă în mecanică (elipsoidul de inerţie) şi în geodezie şi topografie (pentru măsurători).*

2.1.3 Hiperboloidul cu o pânză

Definiţia 2.1.4 *Cuadrica* $(H_1) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***hiperboloid cu o pânză****.*

Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză (H_1) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\alpha^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

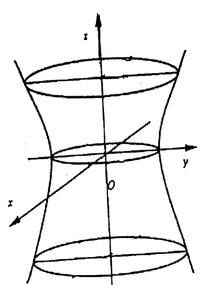
pentru $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$;

2. *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} - 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Hiperboloidul cu o pânză (H_1)

Din punct de vedere al simetriilor, hiperboloidul cu o pânză (H_1) are aceleaşi simetrii cu ale elipsoidului (E).

Observaţia 2.1.5 *Hiperboloidul cu o pânză este folosit în construcţii industriale ca model pentru turnuri de răcire sau coşuri de fum.*

Dacă scriem ecuaţia hiperboloidului cu o pânză (H_1) sub forma

$$(H_1):\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

şi considerăm familiile de drepte

$$D_\lambda:\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases},\quad D_\infty:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\ 1+\dfrac{y}{b}=0\end{cases}$$

$$\overline{D}_\mu:\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b}\end{cases},\quad \overline{D}_\infty:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\ 1-\dfrac{y}{b}=0,\end{cases}$$

unde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, atunci obţinem evident următorul rezultat geometric:

Teorema 2.1.6 *(i) Prin orice punct $M(x_0,y_0,z_0)$ al hiperboloidului cu o pânză (H_1) trec două drepte distincte: una din familia*

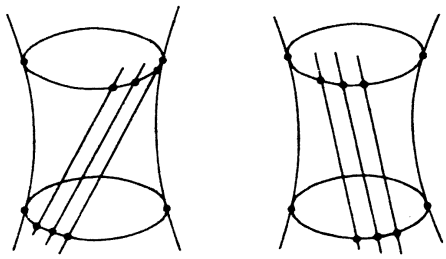
$$(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$$

şi una din familia

$$(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty.$$

(ii) Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty$ sunt incluse în întregime în hiperboloidul cu o pânză (H_1) şi verifică relaţiile

$$(H_1)=\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}}D_\lambda\right)\bigcup D_\infty=\left(\bigcup_{\mu\in\mathbb{R}}\overline{D}_\mu\right)\bigcup\overline{D}_\infty.$$



Generatoarele hiperboloidului cu o pânză (H_1)

Definiţia 2.1.7 *Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup\overline{D}_\infty$ se numesc **generatoarele rectilinii** ale hiperboloidului cu o pânză (H_1).*

Definiţia 2.1.8 *O cuadrică cu proprietatea că prin fiecare punct al său trec două drepte distincte conţinute în cuadrică se numeşte cuadrică **dublu riglată**.*

Corolarul 2.1.9 *Hiperboloidul cu o pânză (H_1) este o cuadrică dublu riglată.*

2.1.4 Hiperboloidul cu două pânze

Definiţia 2.1.5 *Cuadrica* $(H_2) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(H_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***hiperboloid cu două pânze.***

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze (H_2) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Elipsele*

$$(E_\alpha): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\alpha^2}{c^2} + 1 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

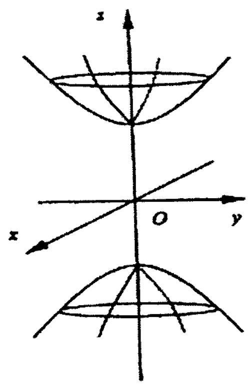
pentru $|\alpha| > c$, *un punct* pentru $|\alpha| = c$ şi *mulţimea vidă* pentru $|\alpha| < c$;

2. *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} + 1 = 0 \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma): \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{\gamma^2}{a^2} + 1 = 0 \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Hiperboloidul cu două pânze (H_2)

Hiperboloidul cu două pânze (H_2) are aceleaşi simetrii cu ale hiperboloidului cu o pânză (H_1). Cele două puncte de intersecţie ale axei Oz cu hiperboloidul cu două pânze (H_2) se numesc *vârfurile* hiperboloidului cu două pânze (H_2).

2.1.5 Paraboloidul eliptic

Definiţia 2.1.6 *Cuadrica* $(P_e) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(P_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***paraboloid eliptic.***

Intersecţiile paraboloidului eliptic (P_e) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Elipsele*

$$(E_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

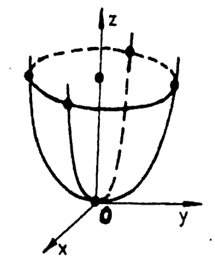
pentru $\alpha > 0$, *punctul* O pentru $\alpha = 0$ şi *mulţimea vidă* pentru $\alpha < 0$;

2. *Parabolele*

$$(\mathcal{P}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - z = -\dfrac{\beta^2}{b^2} \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - z = -\dfrac{\gamma^2}{a^2} \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Paraboloidul eliptic (P_e)

Planele $x = 0$ şi $y = 0$ sunt plane de simetrie ale paraboloidului eliptic (P_e). Axa Oz este axă de simetrie a paraboloidului eliptic (P_e) şi înţeapă suprafaţa în originea O. Originea O se numeşte *vârful* paraboloidului eliptic (P_e).

Observaţia 2.1.7 *Paraboloidului eliptic* (P_e) *este folosit în industria de confecţii drept model pentru calapoade de căciuli de iarnă, dat fiind faptul că acest model asigură mularea căciulii pe cap.*

2.1.6 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 2.1.7 *Cuadrica* $(P_h) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(P_h) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***paraboloid hiperbolic*** *sau* ***şa***.

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic (P_h) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\alpha) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

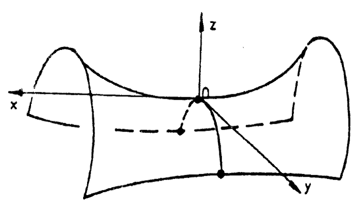
pentru $\alpha \neq 0$ şi *o reuniune de drepte concurente* pentru $\alpha = 0$;

2. *Parabolele*

$$(\mathcal{P}_\beta) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - z = \dfrac{\beta^2}{b^2} \\ y = \beta, \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_\gamma) : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + z = \dfrac{\gamma^2}{a^2} \\ x = \gamma \end{cases}$$

pentru $\forall\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Paraboloidul hiperbolic (P_h)

Simetriile paraboloidului hiperbolic (P_h) sunt aceleaşi cu ale paraboloidului eliptic (P_e). Originea O se numeşte *vârful* paraboloidului hiperbolic (P_h).

Observaţia 2.1.8 *Paraboloidului hiperbolic* (P_h) *este folosit în construcţii industriale ca model pentru acoperişuri (vezi, spre exemplu, acoperişul gării din Predeal) întrucât această suprafaţă se poate realiza din drepte aşezate convenabil unei eficienţe maxime.*

Dacă scriem ecuaţia paraboloidului hiperbolic (P_h) sub forma

$$(P_h) : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

şi considerăm familiile de drepte

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases}, \quad D_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{D}_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \mu z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases}, \quad \overline{D}_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci obţinem evident următorul rezultat geometric:

Teorema 2.1.9 *(i) Prin orice punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al paraboloidului hiperbolic (P_h) trec două drepte distincte: una din familia*

$$(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \cup D_\infty$$

şi una din familia

$$(\overline{D}_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty.$$

(ii) Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty$ sunt incluse în întregime în paraboloidul hiperbolic (P_h) şi verifică relaţiile

$$(P_h) = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} D_\lambda\right) \bigcup D_\infty = \left(\bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} \overline{D}_\mu\right) \bigcup \overline{D}_\infty.$$

Definiţia 2.1.10 *Familiile de drepte $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \cup D_\infty$ şi $(\overline{D}_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}} \cup \overline{D}_\infty$ se numesc **generatoarele rectilinii** ale paraboloidului hiperbolic (P_h).*

Corolarul 2.1.11 *Paraboloidul hiperbolic (P_h) este o cuadrică dublu riglată.*

2.1.7 Conul

Definiţia 2.1.8 *Cuadrica $(C) \subset E_3$ de ecuaţie*

$$(C) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

*unde $a, b, c > 0$, se numeşte **con**.*

Intersecţiile conului (C) cu plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de axe $Oxyz$ sunt:

1. *Elipsele*

$$(E_\alpha):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{\alpha^2}{c^2}\\ z=\alpha\end{cases}$$

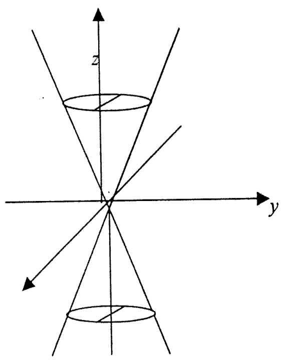
pentru $\alpha\neq 0$ şi *punctul* O pentru $\alpha=0$;

2. *Hiperbolele*

$$(\mathcal{H}_\beta):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-\dfrac{\beta^2}{b^2}\\ y=\beta,\end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_\gamma):\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-\dfrac{\gamma^2}{a^2}\\ x=\gamma\end{cases}$$

pentru $\beta,\gamma\neq 0$ şi *reuniuni de drepte concurente* pentru $\beta=0$ sau $\gamma=0$.



Conul (C)

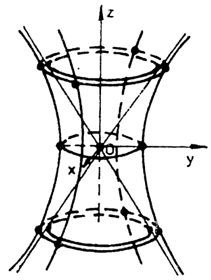
Definiţia 2.1.9 *În cazul în care avem $a\neq b$ spunem că conul (C) este un* ***con eliptic****.*

Definiţia 2.1.10 *În cazul în care avem $a=b=r>0$ spunem că conul (C) este un* ***con circular****.*

Observaţia 2.1.11 *Conul (C) se mai numeşte* ***conul asimptot*** *al hiperboloidului cu o pânză*

$$(H_1):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

datorită formei acestui con în raport cu forma hiperboloidului cu o pânză.

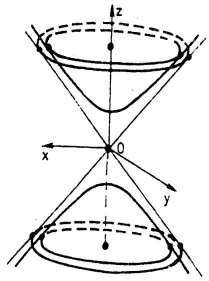


Conul (C) asimptot hiperboloidului cu o pânză (H_1)

Observaţia 2.1.12 *Conul* (C) *se mai numeşte* ***conul asimptot*** *al hiperboloidului cu două pânze*

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

datorită formei acestui con în raport cu forma hiperboloidului cu două pânze.



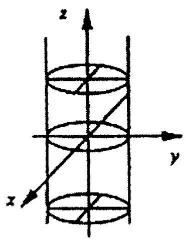
Conul (C) asimptot hiperboloidului cu două pânze (H_2)

2.1.8 Cilindri

Definiţia 2.1.9 *Cuadrica* $(C_c) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_c) : x^2 + y^2 = r^2,$$

unde $r > 0$*, se numeşte* ***cilindru circular****.*

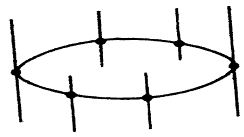


Cilindrul circular (C_c)

Definiţia 2.1.10 *Cuadrica* $(C_e) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$*, se numeşte* ***cilindru eliptic****.*

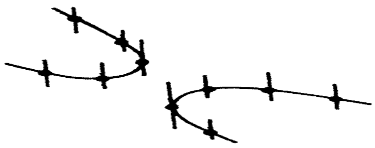


Cilindrul eliptic (C_e)

Definiţia 2.1.11 *Cuadrica* $(C_h) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_h) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***cilindru hiperbolic.***

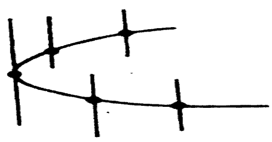


Cilindrul hiperbolic (C_h)

Definiţia 2.1.12 *Cuadrica* $(C_p) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(C_p) : y^2 = 2px,$$

unde $p > 0$, *se numeşte* ***cilindru parabolic.***



Cilindrul parabolic (C_p)

2.1.9 Reuniuni de plane, dreaptă, punct și mulțime vidă

Definiţia 2.1.10 *Cuadrica* $(PS) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PS) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***reuniune de plane secante.***

Definiţia 2.1.11 *Cuadrica* $(PP) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PP) : x^2 - a^2 = 0,$$

unde $a > 0$, *se numeşte* ***reuniune de plane paralele.***

Definiţia 2.1.12 *Cuadrica* $(PC) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(PC) : x^2 = 0$$

se numeşte ***reuniune de plane confundate.***

Definiţia 2.1.13 *Cuadrica* $(D) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(D) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

unde $a, b > 0$, *se numeşte* ***dreaptă.***

Definiţia 2.1.14 *Cuadrica* $(P) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(P) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***punct.***

Definiţia 2.1.15 *Cuadrica* $(V) \subset E_3$ *de ecuaţie*

$$(V) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *se numeşte* ***mulţimea vidă.***

2.2 Cuadrice pe ecuație generală

Să considerăm spaţiul tridimensional al geometriei euclidiene E_3 în care am fixat un reper cartezian ortogonal

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\},$$

adică am fixat un sistem ortogonal de axe (coordonate) $Oxyz$.

Definiţia 2.2.1 *Mulţimea punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *ale căror coordonate verifică o relaţie polinomială de forma*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

coeficienţii reali

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall\ i, j = \overline{1, 4},$$

verificând relaţia

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0,$$

se numeşte ***cuadrică.***

2.3 Invarianţii Δ, δ, I şi J ai unei cuadrice

Pentru început este important să subliniem faptul că dacă unui punct din spaţiu

$$M(x, y, z) \in E_3$$

îi ataşăm coordonatele *omogene* în hiperspaţiu

$$M(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$$

legate prin relaţiile

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \; y = \frac{x_2}{x_4} \text{ şi } z = \frac{x_3}{x_4},$$

unde $x_4 \neq 0$, atunci expresia ecuaţiei unei cuadrice

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării unei forme pătratice

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ &+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2, \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Definiţia 2.3.1 *Matricea simetrică*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei Σ în sistemul ortogonal de axe*** *$Oxyz$.*

Definiţia 2.3.2 *Numerele reale*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \; \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \; I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

şi

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se numesc ***invarianţii metrici*** *ai cuadricei Σ.*

Vom demonstra în continuare că invarianţii metrici Δ, δ, I şi J nu îşi modifică valoarea în urma efectuării unei translaţii sau a unei transformări ortogonale de coordonate în spaţiu.

2.3.1 Invarianța lui Δ, δ, I și J la translații

Să considerăm că $C(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar din spaţiul geometriei euclidiene E_3. Este evident că translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $Cx'y'z'$, translaţie definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

este echivalentă cu o transformare de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o translaţie ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei cuadricei

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x') \;=\; & a_{11}(x_1')^2 + a_{22}(x_2')^2 + a_{33}(x_3')^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' + \\ & + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x_1'x_4' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)x_2'x_4' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)x_3'x_4' + \\ & + g(x_0, y_0, z_0)(x_4')^2, \end{aligned}$$

unde $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}), \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}), \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= 2(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}). \end{aligned}$$

Definiţia 2.3.2 *Matricea simetrică*

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) & g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei Σ în sistemul ortogonal de axe*** *$Cx'y'z'$.*

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) & g(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix},$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ I' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

şi

$$J' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 2.3.3 *Numerele reale Δ, δ, I, J şi Δ', δ', I', J verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta', \ \delta = \delta', \ I = I' \ \text{şi} \ J = J'.$$

Demonstraţie. Egalităţile $\delta = \delta'$, $I = I'$ şi $J = J'$ sunt evidente. Pentru a demonstra egalitatea $\Delta = \Delta'$ folosim proprietăţile determinanţilor. Astfel, dacă înmulţim în determinantul Δ' prima coloană cu $(-x_0)$, a doua coloană cu $(-y_0)$ şi a treia coloană cu $(-z_0)$ şi rezultatele le adunăm la ultima coloană, obţinem ceea ce trebuia demonstrat. ■

2.3.2 Invarianța lui Δ, δ, I și J la transformări ortogonale

Este evident că o transformare ortogonală de coordonate în spaţiu definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

unde $B \cdot {}^TB = I_3$, este echivalentă cu o transformare ortogonală de coordonate omogene definită prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \\ x_4'' \end{pmatrix}.$$

Atunci, efectuând o transformare ortogonală de coordonate ca mai sus, deducem că expresia ecuaţiei cuadricei

$$\Sigma : g(x,y,z) = 0$$

devine expresia echivalentă a anulării formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} Q(x'') &= a''_{11}(x''_1)^2 + a''_{22}(x''_2)^2 + a''_{33}(x''_3)^2 + 2a''_{12}x''_1x''_2 + 2a''_{13}x''_1x''_3 + 2a''_{14}x''_1x''_4 + \\ &\quad +2a''_{23}x''_2x''_3 + 2a''_{24}x''_2x''_4 + 2a''_{34}x''_3x''_4 + a''_{44}(x''_4)^2, \end{aligned}$$

unde $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$.

Definiţia 2.3.3 *Matricea simetrică*

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{14} & a''_{24} & a''_{34} & a''_{44} \end{pmatrix}$$

a formei pătratice Q se numeşte ***matricea cuadricei*** Σ ***în sistemul ortogonal de axe*** $Ox''y''z''$.

Dacă considerăm acum numerele reale

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & a''_{14} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{14} & a''_{24} & a''_{34} & a''_{44} \end{vmatrix}, \ \delta'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}, \ I'' = a''_{11} + a''_{22} + a''_{33}$$

şi

$$J'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{12} & a''_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{13} \\ a''_{13} & a''_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{22} & a''_{23} \\ a''_{23} & a''_{33} \end{vmatrix}$$

atunci putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 2.3.4 *Numerele reale Δ, δ, I, J şi Δ'', δ'', I'', J'' verifică egalităţile:*

$$\Delta = \Delta'', \ \delta = \delta'', \ I = I'' \text{ şi } J = J''.$$

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că avem $\delta = \delta''$, $I = I''$ şi $J = J''$. Pentru aceasta, fie forma pătratică

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \\ &= (x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

În urma transformării ortogonale de mai sus, forma pătratică φ capătă expresia

$$\varphi(x'', y'', z'') = (x'', y'', z'') \cdot {}^TB \cdot A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Deoarece numerele reale δ, I şi J caracterizează polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + I\lambda^2 - J\lambda + \delta,$$

rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$A'' = ^T B \cdot A \cdot B.$$

În concluzie, avem

$$\delta = \delta'', \ I = I'' \text{ şi } J = J''.$$

Repetând raţionamentul de mai sus pentru forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

deducem că, în urma transformării ortogonale omogene de mai sus, forma pătratică Q capătă expresia

$$Q(x'') = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4) \cdot \begin{pmatrix} ^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \\ x''_4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul real Δ caracterizează polinomul caracteristic

$$P_{\overline{A}}(\lambda) = \det(\overline{A} - \lambda I_4) = \lambda^4 - \overline{I}\lambda^3 + L\lambda^2 - K\lambda + \Delta,$$

unde $\overline{I}, L, K \in \mathbb{R}$, rezultă că expresia acestuia este invariantă la o schimbare de bază (schimbare de coordonate) dată de relaţia matriceală

$$\overline{A}'' = \begin{pmatrix} ^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, avem

$$\Delta = \Delta''.$$

■

2.4 Centrul unei cuadrice

Fie cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

şi fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct arbitrar din spaţiul geometriei euclidiene E_3.

Definiţia 2.4.1 *Punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte* **centru** *al cuadricei Σ dacă este satisfăcută următoarea afirmaţie logică:*

$$\forall\ P(x, y, z) \in \Sigma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z) \in \Sigma.$$

Observaţia 2.4.2 *Din punct de vedere geometric, definiţia anterioară arată că punctul C este centrul unei cuadrice Σ dacă pentru orice punct P de pe cuadrica Σ simetricul său faţă de punctul C se află tot pe cuadrica Σ. Din acest motiv, dacă există, centrul C al unei cuadrice Σ se mai numeşte şi* **centrul de simetrie** *al cuadricei Σ.*

Teorema 2.4.3 *Punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ este centru al cuadricei Σ dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Efectuând translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $O'x'y'z'$, unde $O' = C$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' +$$
$$+\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Evident, din definiţia centrului unei cuadrice deducem că condiţia ca noua origine

$$O'(0, 0, 0) = C(x_0, y_0, z_0)$$

a sistemului de axe $O'x'y'z'$ să fie centru al cuadricei Σ se reduce la verificarea afirmaţiei logice

$$\forall\ P(x', y', z') \in \Sigma \Rightarrow P'(-x', -y', -z') \in \Sigma.$$

Această condiţie este echivalentă cu egalitatea

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' -$$
$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' - \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

pentru orice punct $P(x', y', z') \in \Sigma$. Prin scădere, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x' + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y' + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z' = 0,\ \forall\ P(x', y', z') \in \Sigma.$$

Deoarece punctul $P(x', y', z') \in \Sigma$ este arbitrar, rezultă că

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

■

Observaţia 2.4.4 *Deoarece determinantul sistemului liniar*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}$$

este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

rezultă că următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. *Dacă $\delta \neq 0$, atunci cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ are* ***un unic centru*** *$C(x_0, y_0, z_0)$ ale cărui coordonate sunt determinate de sistemul Cramer anterior. Vom demonstra în acest capitol că cuadricele cu centru sunt:* ***sfera, elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză sau două, conul, un punct*** *şi* ***mulţimea vidă.***

2. *Dacă $\delta = 0$, atunci cuadrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ ori nu are* ***niciun centru*** *ori admite* ***o dreaptă de centre*** *ori admite* ***un plan de centre.*** *Vom demonstra în acest capitol că conicele* ***fără centru*** *sunt* ***paraboloidul eliptic, paraboloidul hiperbolic*** *şi* ***cilindrul parabolic,*** *cuadricele cu* ***o dreaptă de centre*** *sunt* ***cilindri circulari, cilindri eliptici, cilindri hiperbolici, dreapta*** *şi* ***reuniunea de plane secante*** *iar cuadricele cu* ***un plan de centre*** *sunt* ***reuniunea de plane paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă.***

2.5 Reducerea la forma canonică a cuadricelor cu centru ($\delta \neq 0$)

Să considerăm acum că $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ este o cuadrică cu centrul $C(x_0, y_0, z_0)$, ceea ce implică $\delta \neq 0$. După cum am observat în demonstraţia teoremei precedente, efectuând o translaţie a sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $O'x'y'z'$, unde $O' = C$, ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Să studiem în continuare forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x', y', z') = a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'.$$

Evident, matricea simetrică ataşată formei pătratice φ în baza canonică a spaţiului vectorial euclidian ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Atunci, conform metodei valorilor proprii de reducere la forma canonică a formelor pătratice, există un sistem de coordonate $O'XYZ$ în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică

$$\varphi(X, Y, Z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2,$$

unde λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt valorile proprii ale matricii A.

Evident, valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \delta = 0.$$

Să presupunem acum că baza în care se obţine forma canonică a formei pătratice φ este baza ortonormată formată din vectorii proprii

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3. Atunci, rotaţia care realizează forma canonică a formei pătratice φ este dată de relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia $\det \mathcal{R} = 1$.

Observaţia 2.5.1 *În aplicaţii vom renumerota, dacă este cazul, valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 şi, implicit, vectorii proprii ortonormaţi $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ şi $\overline{e}_3$, astfel încât*

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

În urma rotaţiei de mai sus, expresia ecuaţiei cuadricei Σ devine

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Evident, matricea cuadricei Σ în sistemul de axe $O'XYZ$ este

$$\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de invarianţa lui Δ şi δ la translaţii şi transformări ortogonale de coordonate, deducem că

$$\Delta = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3) \cdot g(x_0, y_0, z_0) \text{ şi } \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3,$$

adică

$$g(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Ȋn concluzie, ȋn urma unei roto-translaţii convenabile, ecuaţia cuadricei Σ cu centrul ȋn punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ poate fi scrisă ȋn *forma canonică:*

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Teorema 2.5.2 (Clasificarea cuadricelor cu centru $(\delta \neq 0)$**)** *Dacă*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

*este o cuadrică cu centrul ȋn punctul $C(x_0, y_0, z_0)$, atunci cuadrica Σ poate reprezenta ȋn spaţiu una dintre următoarele figuri geometrice: un **elipsoid**, ȋn particular o **sferă**, un **hiperboloid cu o pânză** sau **două**, un **con**, un **punct** sau **mulţimea vidă**.*

Demonstraţie. Ţinând cont de ecuaţia canonică a cuadricei Σ, avem următoarele situaţii posibile:

1. $\Delta \neq 0$;
   (a) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt de acelaşi semn, contrar semnului termenului liber $\dfrac{\Delta}{\delta}$, atunci cuadrica Σ este un *elipsoid*;
   (b) Dacă numai două valori proprii au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *hiperboloid cu o pânză* sau *două*;
   (c) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi $\dfrac{\Delta}{\delta}$ au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este *mulţimea vidă*;
2. $\Delta = 0$;
   (a) Dacă numai două valori proprii au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *con*;
   (b) Dacă λ_1, λ_2 şi λ_3 au acelaşi semn, atunci cuadrica Σ este un *punct* care este exact centrul $C(x_0, y_0, z_0)$.

■

2.6 Reducerea la forma canonică a cuadricelor fără centru $(\delta = 0)$

Fie $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &\quad +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

o cuadrică cu $\delta = 0$. Reaminitm că, ȋn acest caz, sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

este ori *incompatibil* ori *compatibil simplu nedeterminat* ori *compatibil dublu nedeterminat*. Cu alte cuvinte, cuadrica Σ ori nu admite *niciun centru de simetrie* ori admite *o dreaptă de centre de simetrie* ori admite *un plan de centre de simetrie*.

Definiţia 2.6.1 *O cuadrică $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, unde $\delta = 0$, se numeşte* ***cuadrică fără centru****.*

Teorema 2.6.2 (Clasificarea cuadricelor fără centru $(\delta = 0)$**)** *Dacă*

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0$$

este o cuadrică fără centru, atunci cuadrica Σ poate reprezenta în spaţiu una dintre următoarele figuri geometrice: un ***paraboloid eliptic*** *sau* ***hiperbolic****, un* ***cilindru eliptic, hiperbolic*** *sau* ***parabolic****, o* ***reuniune de plane secante****,* ***paralele*** *sau* ***confundate****, o* ***dreaptă*** *sau* ***mulţimea vidă****.*

Demonstraţie. Să considerăm din nou forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

unde $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$. Matricea formei pătratice φ în sistemul de coordonate $Oxyz$ este evident matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

unde $\det A = \delta = 0$. Mai mult, valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda = 0,$$

adică valorile proprii sunt, după o eventuală renumerotare, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $\lambda_3 = 0$, unde

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I \text{ şi } \lambda_1\lambda_2 = J.$$

Dacă notăm acum cu

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $\lambda_3 = 0$ şi efectuăm rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

verifică egalitatea

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

atunci ecuaţia cuadricei Σ se rescrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Evident, matricea cuadricei Σ în sistemul de coordonate $Ox'y'z'$ este matricea simetrică

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{pmatrix}.$$

Deoarece trecerea de la sistemul de coordonate $Oxyz$ la sistemul de coordonate $Ox'y'z'$ s-a făcut printr-o rotaţie, deducem că invariantul Δ are valoarea

$$\Delta = -J(a'_{34})^2.$$

Vom considera în continuare următoarele cazuri posibile:

1. Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $J = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ şi $a'_{34} = \pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{J}} \neq 0$. În această situaţie, efectuăm o translaţie a sistemului de axe $Ox'y'z'$ în sistemul de axe $CXYZ$, translaţie definită prin

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \\ z' = Z + z_0, \end{cases}$$

unde punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ este ales astfel încât ecuaţia cuadricei Σ să capete o formă cât mai simplă. Deoarece efectuând o asemenea translaţie ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : \lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + 2a'_{34}Z + 2(\lambda_1x_0 + a'_{14})X + 2(\lambda_2y_0 + a'_{24})Y +$$

$$+\lambda_1x_0^2 + \lambda_2y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + 2a'_{34}z_0 + a'_{44} = 0,$$

determinăm punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ impunând condiţiile

$$\begin{cases} \lambda_1x_0 + a'_{14} = 0 \\ \lambda_2y_0 + a'_{24} = 0 \\ \lambda_1x_0^2 + \lambda_2y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + 2a'_{34}z_0 + a'_{44} = 0. \end{cases}$$

Este evident că acest sistem are o soluţia unică

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ y_0 = -\dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ z_0 = -\dfrac{\lambda_1x_0^2 + \lambda_2y_0^2 + 2a'_{14}x_0 + 2a'_{24}y_0 + a'_{44}}{2a'_{34}}. \end{cases}$$

şi deci ecuaţia cuadricei Σ se poate scrie sub forma canonică

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{J}} \cdot Z = 0.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este:

(a) un *paraboloid eliptic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 > 0$;

(b) un *paraboloid hiperbolic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$.

2. Dacă $\Delta = 0$ şi $J = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, atunci $a'_{34} = 0$. În această situaţie, ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0,$$

adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în x' şi y' ce poate fi pusă sub forma

$$\Sigma : \lambda_1\left(x' + \frac{a'_{14}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{24}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{24})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Efectuând acum translaţia în spaţiu

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ Z = z', \end{cases}$$

deducem că ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma

$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{44} = 0,$$

unde

$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{24})^2}{\lambda_2}.$$

Prin urmare, cuadrica Σ este:

(a) dacă $a''_{44} \neq 0$;

i. un *cilindru eliptic* dacă λ_1, λ_2 au acelaşi semn, contrar semnului lui a''_{44};

ii. un *cilindru hiperbolic* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$;

iii. *mulţimea vidă* dacă λ_1, λ_2 şi a''_{44} au acelaşi semn;

(b) dacă $a''_{44} = 0$;

i. o *reuniune de plane secante* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 < 0$;

ii. o *dreaptă* dacă $J = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

3. Dacă $\Delta = 0$ şi $J = \lambda_1\lambda_2 = 0$, atunci $\lambda_1 = 0$ sau $\lambda_2 = 0$. Presupunând că $\lambda_2 = 0$, ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma
$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$
unde $\lambda_1 = I \neq 0$, adică avem de-a face cu o ecuaţie polinomială de gradul doi în x' ce poate fi pusă sub forma
$$\Sigma : I\left(x' + \frac{a'_{14}}{I}\right)^2 + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{I} = 0.$$
Efectuând acum translaţia în spaţiu
$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{14}}{I} \\ y'' = y' \\ z'' = z', \end{cases}$$
deducem că ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma
$$\Sigma : I(x'')^2 + 2a'_{24}y'' + 2a'_{34}z'' + a''_{44} = 0,$$
unde
$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{(a'_{14})^2}{I}.$$

   (a) Dacă $k = (a'_{24})^2 + (a'_{34})^2 \neq 0$, atunci, efectuând rotaţia în spaţiu definită prin
$$\begin{cases} x'' = X \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{(a'_{24})^2 + (a'_{34})^2}}(a'_{24}Y - a'_{34}Z) \\ z'' = \dfrac{1}{\sqrt{(a'_{24})^2 + (a'_{34})^2}}(a'_{34}Y - a'_{24}Z), \end{cases}$$
ecuaţia cuadricei Σ se scrie sub forma
$$\Sigma : IX^2 + 2kY + a''_{44} = 0 \Leftrightarrow Y = -\frac{I}{2k}X^2 - \frac{a''_{44}}{2k}.$$
Prin urmare, cuadrica Σ este un *cilindru parabolic.*

   (b) Dacă $k = (a'_{24})^2 + (a'_{34})^2 = 0$, atunci $a'_{24} = a'_{34} = 0$ şi deci ecuaţia cuadricei Σ este
$$\Sigma : I(x'')^2 + a''_{44} = 0 \Leftrightarrow (x'')^2 + \frac{a''_{44}}{I} = 0.$$
Prin urmare, cuadrica Σ este:

      i. o *reuniune de plane paralele* dacă $\dfrac{a''_{44}}{I} < 0$;

      ii. o *reuniune de plane confundate* dacă $a''_{44} = 0$;

      iii. *mulţimea vidă* dacă $\dfrac{a''_{44}}{I} > 0$.

■

2.7 Metoda roto-translației pentru recunoașterea cuadricelor

Să considerăm o cuadrică

$$\Sigma : g(x, y, z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

cu condiţia $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$. Fie Δ, δ, I şi J invarianţii metrici ai cuadricei Σ. Atunci, pentru o mai clară sintetizare a rezultatelor din secţiunile precedente, vom utiliza următoarea terminologie naturală:

1. Cuadrica Σ pentru care $\Delta \neq 0$ (elipsoid, hiperboloid cu o pânză sau două, paraboloid eliptic sau hiperbolic sau mulţime vidă) se numeşte cuadrică *nedegenerată.*
2. Cuadrica Σ pentru care $\Delta = 0$ (con, cilindru eliptic, hiperbolic sau parabolic, reuniune de plane secante, paralele sau confundate, dreaptă, punct sau mulţime vidă) se numeşte cuadrică *degenerată.*
3. Cuadrica Σ pentru care $\delta \neq 0$ (elipsoid, hiperboloid cu o pânză sau două, con, punct, mulţime vidă) se numeşte cuadrică *cu centru.*
4. Cuadrica Σ pentru care $\delta = 0$ (paraboloid eliptic sau hiperbolic, cilindru eliptic, hiperbolic sau parabolic, reuniune de plane secante, paralele sau confundate, dreaptă, mulţime vidă) se numeşte cuadrică *fără centru.*

Să presupunem acum că invarianţii metrici Δ şi J ai cuadricei Σ verifică relaţia

$$\Delta^2 + J^2 \neq 0,$$

adică cuadrica Σ nu este un cilindru parabolic sau o reuniune de plane paralele sau confundate. În acest context, putem scoate în evidenţă următorul

Algoritm de reducere la forma canonică a cuadricei Σ
-Metoda roto-translaţiei în spaţiu-

1. Se asociază cuadricei Σ forma pătratică $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

   $$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

   şi se scrie matricea simetrică

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   a formei pătratice φ.

2. Se calculează valorile proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A ca rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (*ecuaţia seculară*)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda + \delta = 0.$$

3. Se calculează subspaţiile proprii

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

şi

$$V_{\lambda_3} = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_3 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

unde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, corespunzătoare valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 ale matricii A.

4. Printr-o eventuală renumerotare, se aleg

$$\overline{e}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ \overline{e}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ şi } \overline{e}_3 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

vectorii proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 astfel încât

$$\det \mathcal{R} = 1,$$

unde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}.$$

5. Se efectuează rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

în urma căreia ecuaţia cuadricei Σ devine

$$\Sigma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

unde a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, $a'_{44} \in \mathbb{R}$.

6. Forţând factorii comuni λ_1, λ_2 şi λ_3 (dacă este cazul) şi restrângând pătratele descompuse, se rescrie ecuaţia cuadricei Σ sub forma

$$\Sigma : \lambda_1(x' + x_0)^2 + \lambda_2(y' + y_0)^2 + \lambda_3(z' + z_0) + a = 0,$$

unde x_0, y_0, z_0, $a \in \mathbb{R}$.

7. Se efectuează translaţia
$$\begin{cases} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \\ Z = z' + z_0 \end{cases}$$
şi se scrie ecuaţia canonică
$$\Sigma : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a = 0.$$

8. Se recunoaşte cuadrica Σ.

Observaţia 2.7.1 *Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci metoda roto-translaţiei începe direct de la punctul (6).*

Exemplul 2.7.2 *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*
$$\Sigma : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ să considerăm forma pătratică
$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz$$
a cărei matrice este matricea simetrică
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A este
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$
şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A sunt
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \text{ şi } \lambda_3 = 4.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este
$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0,\ 2y - z = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x,0,0) \mid x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este
$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ 2y + z = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (0,y,-2y) \mid y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x = 0, \ \ -y + 2z = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (0, 2z, z) \ | \ z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = (1,0,0), \ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2) \ \text{şi} \ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z'), \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ se reduce la

$$\Sigma : (x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : (x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - 3 \\ Y = y' - \dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ Z = z' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ se reduce la ecuaţia canonică

$$\Sigma : X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \Sigma : X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unui ***hiperboloid cu o pânză.***

Exemplul 2.7.3 *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*

$$\Sigma : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ să considerăm forma pătratică

$$\varphi(x, y, z) = 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A este

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda+4)(\lambda-6) = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A sunt

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4 \text{ şi } \lambda_3 = 6.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0,\ x + y - z = 0,\ 2x + y = 0 \right\} = \\ &= \{(-z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -4$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 0,\ x + 3y - z = 0 \right\} = \\ &= \{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y - 2z = 0,\ x - 2y - z = 0,\ 2x + y + 3z = 0 \right\} = \\ &= \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \text{ şi } \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{6}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la*

$$\Sigma : -4(y')^2 + 6(z')^2 - \sqrt{6}x' + 3\sqrt{2}y' + 2\sqrt{3}z' - 5 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : -4\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 + 6\left(z' + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{35}{8\sqrt{6}} \\ Y = y' - \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \\ Z = z' + \dfrac{\sqrt{3}}{6}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Sigma : -4Y^2 + 6Z^2 - \sqrt{6}X = 0 \Leftrightarrow \Sigma : -\frac{Y^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}} + \frac{Z^2}{\sqrt{6}} = X,$$

adică la ecuaţia unui ***paraboloid hiperbolic.***

Exemplul 2.7.4 *Utilizând metoda roto-translaţiei în spaţiu, să se reducă la forma canonică şi să se recunoască cuadrica*

$$\Sigma : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

Pentru a găsi forma canonică a cuadricei Σ să considerăm forma pătratică

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$$

a cărei matrice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricii simetrice A este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

şi deci valorile proprii ale matricii simetrice A sunt

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 3 \ \text{şi} \ \lambda_3 = 6.$$

Subspaţiul propriu V_{λ_1} corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -2$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 3x - 3y + z = 0, \ x - y + 7z = 0 \right\} = \\ &= \{(x, x, 0) \ | \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_2} corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 3$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 2x + 3y - z = 0, \ 3x + 2y + z = 0, \ x - y + 2z = 0 \right\} = \\ &= \{(-z, z, z) \ | \ z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Subspaţiul propriu V_{λ_3} corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$ este

$$\begin{aligned} V_{\lambda_3} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 5x + 3y - z = 0, \ 3x + 5y + z = 0, \ x - y - z = 0 \right\} = \\ &= \{(x, -x, 2x) \ | \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nişte vectori proprii ortonormaţi corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) \ \text{şi} \ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2),$$

unde matricea

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$\det \mathcal{R} = 1.$$

Efectuând acum rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la*

$$\Sigma : -2(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 + 2\sqrt{2}x' - 6\sqrt{6}z' + 14 = 0.$$

Prin formări de pătrate perfecte, obţinem

$$\Sigma : -2\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 6 = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' \\ Z = z' - \frac{\sqrt{6}}{2}, \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei Σ *se reduce la ecuaţia canonică*

$$\Sigma : -2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \Sigma : -\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0,$$

adică la ecuaţia unui ***hiperboloid cu două pânze****.*

2.8 Probleme rezolvate

1. Să se determine centrele şi razele sferelor:

   (a) $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$;

   (b) $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 5z - 7 = 0$;

   (c) $\Sigma_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0$.

   Rezolvare. Formând pătrate perfecte, găsim ecuaţiile canonice ale sferelor:

   (a) $\Sigma_1 : (x+4)^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow C_1(-4,0,0)$ - centrul sferei; $R_1 = 4$ - raza sferei;

   (b) $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{53}{4} \Rightarrow C_2\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$ - centrul sferei; $R_2 = \frac{\sqrt{53}}{2}$ - raza sferei;

   (c) $\Sigma_3 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow C_3(2,1,3)$ - centrul sferei; $R_3 = 2$ - raza sferei. ■

2. Se dă sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 11 = 0$. Să se determine coordonatele centrului cercului Γ (precum şi raza acestuia) situat la intersecţia dintre sfera Σ şi planul $\pi : 2x - y + 2z + 21 = 0$.

   Rezolvare. Restrângând pătratele în ecuaţia sferei, deducem că sfera are centrul $C(-1,3,-2)$ şi raza $R = 5$. Distanţa de la centrul C la planul π este dată de formula

   $$d = \frac{|-2-3-4+21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 < 5.$$

   Raza cercului Γ se află folosind teorema lui Pitagora: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 3$.

   Pentru a determina coordonatele centrului O al cercului Γ, observăm că punctul O se află la intersecţia dintre planul π si dreapta care trece prin centrul sferei C şi este perpendiculară pe π. Cu alte cuvinte, coordonatele lui O sunt soluţia sistemului

   $$\begin{cases} 2x - y + 2z + 21 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{2}. \end{cases}$$

   Găsim că $x = -11/3$, $y = 13/3$ şi $z = -14/3$. ■

3. Să se determine sfera S în fiecare din următoarele cazuri, cunoscând că:

   (a) este tangentă la planul $\pi : x - z = 0$ şi are centrul $C(2,0,-3)$.

   (b) trece prin punctele necoplanare $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ şi $C(1,0,0)$.

   Rezolvare. (a) Raza sferei este $R = d(C,\pi) = 5/\sqrt{2}$. În concluzie, ecuaţia sferei este

   $$S : (x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{2}.$$

(b) Fie $C(\alpha,\beta,\gamma)$ centrul sferei căutate şi $R>0$ raza acesteia. Ecuaţia sferei este

$$S:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2.$$

Punând condiţia ca punctele $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ şi $C(1,0,0)$ să aparţină sferei S, găsim sistemul

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=R^2 \\ \alpha^2+\beta^2+(1-\gamma)^2=R^2 \\ \alpha^2+(1-\beta)^2+\gamma^2=R^2 \\ (1-\alpha)^2+\beta^2+\gamma^2=R^2, \end{cases}$$

cu soluţiile $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{2}$ şi $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, ecuaţia sferei este

$$S:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

■

4. Să se determine ecuaţia suprafeţei generate de elipsa mobilă

$$E_{\lambda\mu}:\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=\lambda \\ x=\mu, \end{cases}$$

unde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, care se deplasează paralel cu ea însăşi şi se deformează sprijinindu-se pe hiperbola fixă

$$H:\begin{cases} -\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1 \\ z=0. \end{cases}$$

Rezolvare. Faptul că elipsa $E_{\lambda\mu}$ se sprijină pe hiperbola H se reduce la compatibilitatea sistemului de ecuaţii (elipsa $E_{\lambda\mu}$ şi hiperbola H au două puncte comune)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=\lambda \\ -\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1 \\ x=\mu \\ z=0. \end{cases}$$

Este evident că sistemul este compatibil dacă şi numai dacă λ şi μ satisfac relaţia $\mu^2=9(\lambda+1)$. Folosind acum ecuaţiile elipsei $E_{\lambda\mu}$, prin înlocuirea parametrilor λ şi μ, găsim ecuaţia suprafeţei căutate:

$$\Sigma:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Aceasta este ecuaţia unui hiperboloid cu două pânze. ■

5. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu al căror raport al distanţelor la punctele $A(2,-2,3)$ şi $B(-2,2,-3)$ este constant.

Rezolvare. Fie $P(x,y,z)$ un punct mobil în spaţiu, care verifică proprietatea din enunţ. Înseamnă că avem

$$\frac{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}=\lambda>0.$$

Rezultă că locul geometric căutat este determinat de cuadrica

$$\begin{aligned}\Sigma : &(1-\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2+(1-\lambda)z^2-\\ &-4(1+\lambda)x+4(1+\lambda)y-6(1+\lambda)z+17(1-\lambda)=0.\end{aligned}$$

Avem următoarele situaţii:

(a) dacă $\lambda=1$, atunci cuadrica Σ se reduce la planul ce trece prin origine (mijlocul segmentului $[AB]$)

$$P:2x-2y+3z=0.$$

Acesta este planul mediator al segmentului $[AB]$.

(b) dacă $\lambda\in(0,1)\cup(1,\infty)$, atunci cuadrica Σ este sfera

$$S:\left(x-2\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2+\left(y+2\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2+\left(z-3\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2=\frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2},$$

cu centrul în $C(2\mu,-2\mu,3\mu)$ şi de rază $R>0$, unde

$$\mu=\frac{1+\lambda}{1-\lambda},\quad R=\frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}.$$

■

6. Să se determine coordonatele centrului de simetrie (în cazul în care acesta există) şi să se specifice tipul cuadricelor:

(a) $\Sigma_1: 5x^2-8y^2+5z^2-6xz+8=0$;

(b) $\Sigma_2: x^2-y^2+z^2-2xy-2xz-2yz-5x-1=0$;

(c) $\Sigma_3: 2x^2+5y^2+z^2-4xy+2xz+2z-1=0$.

Rezolvare. (a) Cuadrica Σ_1 este nedegenerată şi are centru de simetrie deoarece $\Delta=8\delta\neq 0$, unde

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&0&-3&0\\0&-8&0&0\\-3&0&5&0\\0&0&0&8\end{vmatrix}=-1024,\quad \delta=\begin{vmatrix}5&0&-3\\0&-8&0\\-3&0&5\end{vmatrix}=-128.$$

Valorile proprii ale matricii care determină pe $\delta\neq 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei seculare. Acestea sunt $\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$ şi $\lambda_3=-8$. În concluzie, cuadrica Σ_1 este un hiperboloid cu două pânze de ecuaţie canonică

$$\Sigma_1:\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{1}-\frac{Z^2}{1}+1=0.$$

Coordonatele centrului de simetrie al cuadricei Σ_1 sunt $C_1(0,0,0)$ şi se deduc prin rezolvarea sistemului liniar

$$\begin{cases} 5x - 3z = 0 \\ y = 0 \\ -3x + 5z = 0. \end{cases}$$

(b) Deoarece $\Delta \neq 0$ şi $\delta \neq 0$, cuadrica Σ_2 este nedegenerată şi are centru de simetrie. Invarianţii ortogonali Δ şi δ au valorile

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -5/2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 33/2, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Coordonatele centrului de simetrie sunt soluţia sistemului liniar

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0, \end{cases}$$

adică $C_2(5/4, -5/4, 0)$. Valorile proprii ale matricii care determină invariantul $\delta \neq 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei seculare, şi anume $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = -2$. În concluzie, cuadrica Σ_1 este un hiperboloid cu o pânză de ecuaţie

$$\Sigma_2 : \frac{X^2}{\frac{33}{16}} + \frac{Y^2}{\frac{33}{8}} - \frac{Z^2}{\frac{33}{16}} - 1 = 0.$$

(c) Invarianţii ortogonali Δ şi δ ai cuadricei Σ_3 sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cuadrica este nedegenerată şi are centrul $C_3(5,2,-6)$ dat de soluţia sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 5y = 0 \\ x + z = -1. \end{cases}$$

Valorile proprii ale matricii care determină pe $\delta \neq 0$ sunt soluţiile ecuaţiei seculare $f(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda - 1 = 0$. Deoarece avem

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = -1, \quad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = \infty,$$

deducem că ecuaţia are trei rădăcini reale pozitive, şi anume $\lambda_1 \in (0,1)$, $\lambda_2 \in (1,2)$ şi $\lambda_3 \in (2,\infty)$. În concluzie, cuadrica Σ_3 este elipsoidul

$$\Sigma_3 : \frac{X^2}{\frac{7}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{\lambda_2}} + \frac{Z^2}{\frac{7}{\lambda_3}} - 1 = 0.$$

7. Să se determine coordonatele centrului de simetrie al cuadricei

$$\Sigma : 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2y + 2z - 1 = 0$$

şi să se efectueze o translaţie în acest centru.

Rezolvare. Centrul de simetrie al cuadricei Σ se determină cu ajutorul sistemului liniar

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 5y = -1 \\ x + z = -1, \end{cases}$$

care are soluţia coordonatele $C(3, 1, -4)$. Făcând translaţia sistemului de axe $Oxyz$ în sistemul de axe $Cx'y'z'$, determinată de transformările $x = x' + 3$, $y = y' + 1$ şi $z = z' - 4$, cuadrica Σ capătă expresia

$$\Sigma : 2\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2 - 4x'y' + 2x'z' - 4 = 0.$$

■

8. Să se reducă la forma canonică şi să se specifice natura şi tipul cuadricelor, precizându-se roto-translaţiile spaţiale făcute:

   (a) $\Sigma_1 : 36x^2 + y^2 + 4z^2 + 72x + 6y - 40z + 109 = 0$;

   (b) $\Sigma_2 : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$;

   (c) $\Sigma_3 : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$;

   (d) $\Sigma_4 : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$;

   (e) $\Sigma_5 : 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2x + y - z - 1 = 0$;

   (f) $\Sigma_6 : 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$.

Rezolvare. (a) Deoarece forma pătratică $q_1(x, y, z) = 36x^2 + y^2 + 4z^2$ a cuadricei Σ_1 este deja în formă canonică, rezultă că este suficientă doar o translaţie a sistemului de axe $Oxyz$ pentru a obţine forma canonică. Formând pătrate în expresia lui Σ_1, obţinem

$$\Sigma_1 : 36[(x+1)^2 - 1] + (y+3)^2 - 9 + 4[(z-5)^2 - 25] + 109 = 0.$$

Efectuând translaţia $X = x + 1$, $Y = y + 3$ şi $Z = z - 5$ în centrul $C(-1, -3, 5)$, găsim că Σ_1 este elipsoidul de ecuaţie

$$\Sigma_1 : X^2 + \frac{Y^2}{36} + \frac{Z^2}{9} = 1.$$

(b) Folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii, reducem la forma canonică forma pătratică $q_2(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz$ a cuadricei Σ_2. Valorile proprii ale matricii acestei forme pătratice sunt soluţiile ecuaţiei seculare

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,$$

adică $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ şi $\lambda_3 = -1$. Bazele ortonormate ale subspaţiilor proprii asociate sunt

$$B_1 = \{\overline{e}_1 = (1,0,0)\}, \quad B_2 = \left\{\overline{e}_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\},$$

$$B_3 = \left\{\overline{e}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Acestea produc rotaţia spaţială directă sau pozitivă (de determinant egal cu unu)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Efectuând schimbarea de coordonate (rotaţia spaţială directă)

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z'), \end{cases}$$

în urma calculelor, expresia cuadricei Σ_2 se reduce la

$$\Sigma_2 : (x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_2 : (x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuând acum translaţia $X = x' - 3$, $Y = y' - 4/\sqrt{5}$ şi $Z = z' + 2/\sqrt{5}$, deducem că cuadrica Σ_2 este hiperboloidul cu o pânză

$$\Sigma_2 : X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0.$$

(c) Matricea formei pătratice $q_3(x, y, z) = 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$ a cuadricei Σ_3 este

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrici sunt rădăcinile ecuaţiei seculare, şi anume $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ şi $\lambda_3 = 6$. Baza ortonormată în care se obţine forma canonică a formei pătratice q_3 este

$$B_1 = \left\{\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)\right\}, \quad B_2 = \left\{\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\right\},$$

$$B_3 = \left\{\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)\right\}.$$

În concluzie, vom efectua rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-x' - \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2x' - \sqrt{2}y') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z'). \end{cases}$$

În urma rotaţiei, expresia cuadricei Σ_3 se reduce la

$$\Sigma_3 : 6\left(y'\right)^2 - 4\left(z'\right)^2 - \sqrt{6}x' - 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{2}z' - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_3 : 6\left(y' - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 4\left(z' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{35}{8\sqrt{6}} \\ Y = y' - \dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ Z = z' - \dfrac{3\sqrt{2}}{8}, \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ_3 este paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma_3 : \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} = \sqrt{6}X.$$

(d) Forma pătratică asociată cuadricei Σ_4 este

$$q_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

Aplicând metoda transformărilor ortogonale de reducere la forma canonică a formelor pătratice, obţinem că baza ortonormată în care găsim forma canonică este

$$B = \left\{ \overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),\ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Aceasta este formată din vectori proprii ortonormaţi, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$ şi $\lambda_3 = 3$. Efectuând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}x' - \sqrt{2}y' + z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}x' + \sqrt{2}y' - z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}y' + 2z'), \end{cases}$$

obţinem cuadrica

$$\Sigma_4 : -2\,(x')^2 + 3\,(y')^2 + 6\,(z')^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{36}{\sqrt{6}}z' + 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_4 : -2\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\,(y')^2 + 6\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 = 0.$$

Efectuând translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = y' \\ Z = z' - \dfrac{3}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

găsim hiperboloidul cu două pânze

$$\Sigma_4 : -\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0.$$

(e) Matricea formei pătratice $q_5(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$ a cuadricei Σ_5 are valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 3$. Baza ortonormată de vectori proprii în care se obţine forma canonică este

$$B = \left\{ \overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1, 1, -1)\,,\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0, 1, 1)\,,\ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2, -1, 1) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Prin urmare, facând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}x' + 2z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}x' + \sqrt{3}y' - z') \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}x' + \sqrt{3}y' + z'), \end{cases}$$

expresia cuadricei Σ_5 se reduce la

$$\Sigma_5 : (y')^2 + 3\,(z')^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_5 : (y')^2 + 3\left(z' + \frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x' - \frac{19\sqrt{3}}{72}\right) = 0.$$

În final, efectuând translaţia

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{19\sqrt{3}}{72} \\ Y = y' \\ Z = z' + \dfrac{1}{3\sqrt{6}}, \end{cases}$$

rezultă că cuadrica Σ_5 este paraboloidul eliptic

$$\Sigma_5 : Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}X.$$

(f) Reducând prin metoda valorilor şi vectorilor proprii (a transformărilor ortogonale) la forma canonică forma pătratică

$$q_6(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 12xy,$$

găsim valorile proprii $\lambda_1 = 0$, de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$, şi $\lambda_2 = 13$, de multiplicitate algebrică $m_2 = 1$. Baza ortonormată de vectori proprii în care se obţine forma canonică este

$$B = \left\{\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2, 0), \ \overline{e}_2 = (0, 0, 1), \ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3, 0)\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Efectuând rotaţia spaţială directă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{13} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2z') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3z') \\ z = y', \end{cases}$$

în urma calculelor, expresia cuadricei Σ_6 se reduce la

$$\Sigma_6 : 169\,(z')^2 + 2\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}z' + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_6 : \left(z' - \frac{\sqrt{13}}{169}\right)^2 + 2\sqrt{13}\left(x' + \frac{6}{13\sqrt{13}}\right) = 0.$$

Efectuând acum translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{6}{13\sqrt{13}} \\ Y = y' \\ Z = z' - \dfrac{\sqrt{13}}{169}, \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ_6 este cilindrul parabolic

$$\Sigma_6 : 169Z^2 + 2\sqrt{13}X = 0.$$

■

9. Să se afle ecuaţia diametrului cuadricei

$$\Sigma : 4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0,$$

care trece prin punctul $A(0, 0, 2)$.

Rezolvare. Coordonatele centrului de simetrie al cuadricei au valorile $x_0 = -1/3$, $y_0 = 2/3$ şi $z_0 = 2/3$, ca soluţie a sistemului

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 3y - 2 = 0 \\ 2z + x = 1. \end{cases}$$

În concluzie, ecuaţia diametrului căutat este ecuaţia dreptei ce trece prin A şi centrul cuadricei, adică

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{4}.$$

■

10. Să se determine ecuaţia planului tangent π la paraboloidul eliptic

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} + y^2 = 2z,$$

care este perpendicular pe vectorul $\overline{v} = \overline{i} - \overline{k}$.

Rezolvare. Toate planele din spaţiu perpendiculare pe vectorul $\overline{v}$ sunt determinate de fascicolul de plane paralele

$$\pi_\lambda : x - z + \lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alegem dintre aceste plane pe acela care are un singur punct comun cu paraboloidul eliptic Σ, adică pe acela care are proprietatea că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 2z \\ x - z + \lambda = 0, \end{cases}$$

are soluţie unică. Scoţând $x = z - \lambda$ din a doua ecuaţie şi introducând în prima ecuaţie, obţinem

$$y^2 = 2z - \frac{(z-\lambda)^2}{9}.$$

Unicitatea soluţiei ecuaţiei în y implică ecuaţia $(z - \lambda)^2 = 18z$. Punând condiţia ca discriminantul să se anuleze, găsim $\lambda = -9/2$. În concluzie, ecuaţia planului căutat este

$$\pi : x - z - \frac{9}{2} = 0.$$

■

11. Se dă paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = y.$$

Să se calculeze unghiul dintre generatoarele rectilinii ale cuadricei Σ, care trec prin punctul $A(3,1,0)$.

Rezolvare. Prin punctul $A(3,1,0)$ trec două generatoare ale paraboloidului hiperbolic Σ. Este vorba despre generatoarele

$$d_{\lambda=1} : \begin{cases} \dfrac{x}{3} - y - \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{2} - 1 = 0, \end{cases} \qquad d_{\mu=1} : \begin{cases} \dfrac{x}{3} - y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{z}{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Vectorii directori ai acestor generatoare sunt:

$$\overline{v}_{\lambda=1} = \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \overline{j} - \frac{1}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{k}\right) = -\frac{1}{2}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k},$$

$$\overline{v}_{\mu=1} = \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{k}\right) = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}.$$

În concluzie, unghiul φ dintre generatoarele $d_{\lambda=1}$ şi $d_{\mu=1}$ este dat de formula

$$\cos\varphi = \frac{\langle \overline{v}_{\lambda=1}, \overline{v}_{\mu=1}\rangle}{||\overline{v}_{\lambda=1}|| \cdot ||\overline{v}_{\mu=1}||} = -\frac{9}{17}.$$

■

12. Să se determine locul geometric al punctelor de pe hiperboloidul cu o pânză

$$\Sigma : \frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 = 0,$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Rezolvare. Deoarece generatoarele de la infinit (cele care se intersectează) nu sunt perpendiculare, vom studia problema doar pentru generatoarele

$$d_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = \lambda\left(1 - \dfrac{z}{2}\right) \\ \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{z}{2}\right) \end{cases}, \quad d_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = \mu\left(1 + \dfrac{z}{2}\right) \\ \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{z}{2}\right) \end{cases},$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, ale căror vectori directori sunt

$$\begin{aligned} \overline{v}_\lambda &= \left(\frac{1}{2}\overline{i} - \overline{j} + \frac{\lambda}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{2}\overline{i} + \overline{j} - \frac{1}{2\lambda}\overline{k}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2}\right)\overline{i} + \left(\frac{1}{4\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right)\overline{j} + \overline{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v}_\mu &= \left(\frac{1}{2}\overline{i} - \overline{j} - \frac{\mu}{2}\overline{k}\right) \times \left(\frac{1}{2}\overline{i} + \overline{j} + \frac{1}{2\mu}\overline{k}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\right)\overline{i} - \left(\frac{1}{4\mu} + \frac{\mu}{4}\right)\overline{j} + \overline{k}. \end{aligned}$$

Fie $M(\alpha,\beta,\gamma)$ un punct de pe hiperboloidul cu o pânză Σ. Cu alte cuvinte, avem

$$\Sigma : \alpha^2 - 4\beta^2 + \gamma^2 = 4.$$

Prin punctul M trec două generatoare corespunzătoare valorilor

$$\lambda = \frac{\alpha - 2\beta}{2-\gamma}, \quad \mu = \frac{\alpha - 2\beta}{2+\gamma}, \ \gamma \neq \pm 2.$$

Condiţia de perpendicularitate a generatoarelor d_λ şi d_μ se reduce la

$$\langle \overline{v}_\lambda, \overline{v}_\mu \rangle = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2\mu^2 - 3(\lambda^2+\mu^2) - 16\lambda\mu + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{8\mu \pm \sqrt{15}\cdot(\mu^2+1)}{5\mu^2-3}, \ \mu \neq \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Înlocuind λ şi μ, în urma calculelor, obţinem cuadricele

$$\Sigma'_{1,2} : 5\alpha^2 + 20\beta^2 + 5\gamma^2 - 20\alpha\beta \mp 4\sqrt{15}\cdot\beta\gamma \mp 4\sqrt{15}\cdot\alpha - 12\gamma - 44 = 0.$$

În concluzie, locul geometric cerut este format din punctele $M(\alpha,\beta,\gamma)$, ale căror coordonate verifică ecuaţiile cuadricelor Σ şi Σ'_1, respectiv Σ şi Σ'_2. Cu alte cuvinte, punctele M aparţin mulţimii $(\Sigma \cap \Sigma'_1) \cup (\Sigma \cap \Sigma'_2)$, din care se scot punctele impuse de condiţiile de existenţă de mai sus. ■

2.9 Probleme propuse

1. Să se determine centrele şi razele sferelor:

   (a) $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 5z + 8 = 0$;

   (b) $\Sigma_2 : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + y - 2z = 0$.

   R. (a) $C_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ - centrul sferei; $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - raza sferei;

   (b) $C_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ - centrul sferei; $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ - raza sferei.

2. Fie sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Să se determine raza cercului obţinut prin intersecţia sferei cu planul $\pi : x - 2y + 2\sqrt{5}z = 0$.

   R. $r = \sqrt{3}$.

3. Să se determine sfera S, în fiecare din următoarele cazuri:

   (a) trece prin punctele necoplanare $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$, unde $a > 0$, $b > 0$ şi $c > 0$;

   (b) are centrul pe dreapta $d : x = 2y - 2 = 2z + 4$, trece prin punctul $A(1,1,0)$ şi este tangentă dreptei $d' : 2x - 2 = 2y - 2 = z$;

(c) are centrul situat în planul $\pi : x + 2y - z - 1 = 0$ şi trece prin cercul

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x + y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

R. (a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$;

(b) $S : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$;

(c) Sfera căutată aparţine familiei de sfere

$$S_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 5 + \lambda (x + y - z - 4) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Punând condiţia ca centrul acestei sfere să aparţină planului π, găsim valoarea $\lambda = 2$. Deci, sfera căutată are ecuaţia

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

4. Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât planul $\pi : x+y+z-\lambda = 0$ să fie tangent la sfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2 = 0,$$

şi să se afle coordonatele punctului de contact dintre acestea.

R. $\lambda_1 = -2$, $P_1(-2, 1, -1)$; $\lambda_2 = 4$, $P_2(0, 3, 1)$.

5. Se dă un tetraedru tridreptunghic $SABC$. Din vârful S se coboară perpendiculara pe planul ABC şi se prelungeşte până se intersectează cu sfera circumscrisă tetraedrului. Să se arate că $3SP = SI$, unde P este piciorul perpendicularei pe planul triunghiului ABC iar I este punctul de intersecţie cu sfera.

R. Dacă avem $S(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, unde $a > 0$, $b > 0$ şi $c > 0$, atunci

$$SI = 3SP = \frac{3}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}.$$

6. Să se determine ecuaţia planului diametral al cuadricei

$$\Sigma : x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + 6y - 4z - 2 = 0,$$

care este paralel cu planul $\pi : 2x - y - z = 0$.

R. $\pi_d : 4x - 2y - 2z - 13 = 0$.

7. Să se determine centrul de simetrie al cuadricei

$$\Sigma : x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0,$$

precum şi un reper în raport cu care cuadrica admite formă canonică.

R. Centrul cuadricei este $C(-1/3, -2/3, 2/3)$. Reperul căutat $\mathcal{O}XYZ$ are originea în centrul $\mathcal{O} = C$ şi are direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$ determinate de versorii

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1).$$

8. Să se reducă la formă canonică (precizându-se roto-translaţiile spaţiale efectuate) şi să se recunoască cuadricele:

   (a) $\Sigma_1 : 5x^2 - 8y^2 + 5z^2 - 6xz + 8 = 0;$
   (b) $\Sigma_2 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 5x - 1 = 0;$
   (c) $\Sigma_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0;$
   (d) $\Sigma_4 : x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0;$
   (e) $\Sigma_5 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 8 = 0;$
   (f) $\Sigma_6 : x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0;$
   (g) $\Sigma_7 : 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0;$
   (h) $\Sigma_8 : 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0;$
   (i) $\Sigma_9 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 9 = 0;$
   (j) $\Sigma_{10} : z^2 + 4xy - 1 = 0.$

R. (a) $\Sigma_1 : -X^2 + \dfrac{Y^2}{4} + Z^2 + 1 = 0$ - hiperboloid cu două pânze; $C(0,0,0)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (0,1,0)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

(b) $\Sigma_2 : X^2 + 2Y^2 - 2Z^2 - 33/8 = 0$ - hiperboloid cu o pânză; $C\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}, 0\right)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

(c) $\Sigma_3 : Y^2 + 2Z^2 - \dfrac{8}{\sqrt{2}}X = 0$ - paraboloid eliptic; $\mathcal{O}(-3/2, -11/2, -3)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\overline{e}_2 = (0,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(d) $\Sigma_4 : 4X^2 - 18Y^2 + 2Z^2 + 1 = 0$ - hiperboloid cu două pânze; $C(-1/2, -1, -1)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

(e) $\Sigma_5 : X^2 + 3Z^2 - 1 = 0$ - cilindru eliptic; $\mathcal{O}(-2,1,1)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(f) $\Sigma_6 : X^2 + 2Z^2 - \dfrac{16}{\sqrt{2}}Y = 0$ - paraboloid eliptic; $\mathcal{O}(0,2,-3)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = (0,0,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(g) $\Sigma_7 : -4Y^2 + 6Z^2 - \sqrt{6}X = 0$ - paraboloid hiperbolic; $\mathcal{O}\left(\dfrac{55}{48}, -\dfrac{98}{48}, -\dfrac{19}{48}\right)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$;

$\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(h) $\Sigma_8 : 13Z^2 + 2\sqrt{13}X = 0$ - cilindru parabolic; $\mathcal{O}(2/13, -3/13, 0)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,2,0)$, $\overline{e}_2 = (0,0,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,-3,0)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(i) $\Sigma_9 : X^2 + 3Z^2 = 0$ - dreaptă dublă; $\mathcal{O}(-2,1,1)$ - originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$; $\overline{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ - direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$.

(j) $\Sigma_{10} : X^2 - 2Y^2 + 2Z^2 - 1 = 0$ - hiperboloid cu o pânză; $C(0,0,0)$ - centrul cuadricei; $\overline{e}_1 = (0,0,1)$, $\overline{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overline{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ - direcţiile axelor CX, CY şi CZ.

9. Să se discute natura şi tipul cuadricelor

$$\Sigma_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda(xy + xz + yz) = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

R. Dacă $\lambda \in (-\infty, -1/2) \cup (1, \infty)$, atunci cuadrica este un *con circular*; Dacă $\lambda \in (-1/2, 1)$, atunci cuadrica este un *punct dublu*; Dacă $\lambda = -1/2$, atunci cuadrica este un *dreaptă dublă*; Dacă $\lambda = 1$, atunci cuadrica este un *plan confundat*.

10. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$\Sigma : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} - 1 = 0,$$

care trec prin punctul $A(1,4,8)$ şi să se calculeze unghiul dintre acestea.

R. Generatoarele căutate sunt

$$d_1 : \begin{cases} 2x + 2y - z - 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} 10x + 6y - 5z + 6 = 0 \\ 6x - 10y + 3z + 10 = 0. \end{cases}$$

Unghiul dintre aceste generatoare este: $\cos\theta = 83/85$.

11. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\Sigma : \frac{x^2}{4} - y^2 = 4z,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 3x + 2y - 4z = 0$.

R. Generatoarele căutate sunt

$$d_1 : \begin{cases} x - 2y - 4z = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

12. Să se determine generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$\Sigma : x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0,$$

care sunt conţinute în planul $\pi : 6x + 3y - 2z + 6 = 0$.

R. Există o singură generatoare, şi anume

$$d : \begin{cases} 6x - 3y + 2z + 6 = 0 \\ 6x + 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

13. Să se arate că locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de dreptele

$$d_1 : x + 1 = y - 1 = z - 1, \quad d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

este o cuadrică riglată şi să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii de la infinit ale acestei cuadrice.

R. Locul geometric căutat este cuadrica

$$\Sigma : x^2 - 2y^2 + z^2 + 8xy + 2xz + 8yz - 24x + 12y + 24z - 2 = 0,$$

care redusă la forma canonică este paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma : Y^2 - Z^2 = 4\sqrt{2}X,$$

unde $\mathcal{O}(-2/3, 1/3, -2/3)$ este originea sistemului de axe $\mathcal{O}XYZ$ iar

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \ \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

reprezintă direcţiile axelor $\mathcal{O}X$, $\mathcal{O}Y$ şi $\mathcal{O}Z$. Generatoarele la infinit ale paraboloidului hiperbolic Σ sunt

$$d_\infty : \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} + 2)y + (\sqrt{2} - 1)z + \sqrt{2} - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

şi

$$d_{-\infty} : \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 2)y + (\sqrt{2} + 1)z + \sqrt{2} + 2 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

3. GENERĂRI DE SUPRAFEȚE

În acest capitol vor fi descrise ecuaţiile carteziene ale *suprafeţelor cilindrice*, *suprafeţelor conice* şi *suprafeţelor de rotaţie* din spaţiu. Aceste suprafeţe vor fi obţinute prin deplasarea condiţionată geometric a unei curbe din spaţiu (în particular, această curbă va fi o dreaptă). Pentru a putea obţine aceste ecuaţii carteziene vom admite geometric-intuitiv, fără o demonstraţie riguroasă, că o *curbă în spaţiu* C este definită ca intersecţia a două *suprafeţe* Σ_1 şi Σ_2 din spaţiul E_3, adică avem

$$C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2,$$

unde

$$\Sigma_1 : f(x, y, z) = 0 \text{ şi } \Sigma_2 : g(x, y, z) = 0.$$

O expunere riguroasă şi detaliată a *teoriei curbelor şi suprafeţelor în spaţiu* va fi făcută în capitolele următoare.

3.1 Suprafețe cilindrice

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$D : \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

este o dreaptă în spaţiu definită ca intersecţia a două plane P şi Q.

Definiţia 3.1.1 *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin deplasarea unei drepte paralele cu dreapta D, care se sprijină pe curba C, se numeşte **suprafaţă cilindrică** de **curbă directoare** C şi **generatoare** D.*

Teorema 3.1.2 *Suprafaţa cilindrică Σ de curbă directoare C şi generatoare D este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma : \Phi(P, Q) = 0,$$

*unde funcţia Φ se numeşte **funcţia de contact** a suprafeţei cilindrice Σ.*

Demonstraţie. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D să notăm că mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu paralele cu generatoarea D este reprezentată de familia de drepte

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}): \begin{cases} P = \lambda \\ Q = \mu \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este compatibil (i.e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

În concluzie, ţinând cont de faptul că

$$\lambda = P \text{ şi } \mu = Q,$$

deducem că ecuaţia carteziană a suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D este

$$\Sigma : \Phi(P, Q) = 0.$$

■

Exemplul 3.1.3 *Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ având generatoarele paralele cu dreapta*

$$D : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

şi care se sprijină pe curba directoare

$$C : \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Pentru început să observăm că dreapta D poate fi privită ca intersecţia planelor

$$P : x - y = 0 \text{ şi } Q : y - z = 0,$$

adică avem

$$D : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Familia de drepte din spaţiu paralele cu dreapta D este

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - y = \lambda \\ y - z = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - y = \lambda \\ y - z = \mu \\ x = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y şi z. Deoarece din ultimele trei ecuaţii găsim

$$z = 0,\ y = \mu \text{ şi } x = \mu^2,$$

*rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului $(\mathcal{S})$ este*

$$\mu^2 - \mu = \lambda \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = \mu^2 - \lambda - \mu.$$

Înlocuind în condiţia de contact

$$\lambda = x - y \text{ şi } \mu = y - z,$$

găsim că ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ de curbă directoare C şi generatoare D este

$$\Sigma : (y - z)^2 - x + z = 0.$$

3.2 Suprafețe conice

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$V : \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

este un punct din spaţiu definit ca intersecţia a trei plane P, Q şi R, alese convenabil.

Definiţia 3.2.1 *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin deplasarea unei drepte care se sprijină pe curba C şi care trece prin punctul fix V se numeşte **suprafaţă conică** de **curbă directoare** C şi **vârf** V.*

Teorema 3.2.2 *Submulţimea $\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x, y, z) \mid R = 0\}$ a suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma' : \Phi\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0,$$

*unde funcţia Φ se numeşte **funcţia de contact** a suprafeţei conice Σ.*

Demonstraţie. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V să notăm că mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu care nu sunt incluse în planul $R = 0$ şi care trec prin vârful V este reprezentată de familia de drepte

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} P - \lambda R = 0 \\ Q - \mu R = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} P - \lambda R = 0 \\ Q - \mu R = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

este compatibil (i.e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

În concluzie, presupunând că $R \neq 0$ şi ţinând cont de faptul că

$$\lambda = \frac{P}{R} \text{ şi } \mu = \frac{Q}{R},$$

deducem că ecuaţia carteziană a submulţimii

$$\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x, y, z) \mid R = 0\}$$

a suprafeţei conice Σ de curbă directoare C şi vârf V este

$$\Sigma' : \Phi\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

■

Observaţia 3.2.3 *În demonstraţia teoremei precedente se poate folosi, de asemenea, şi familia de drepte (Explicaţi de ce!)*

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} P - \lambda Q = 0 \\ Q - \mu R = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, urmând să punem ulterior condiţiile $Q \neq 0$ şi $R \neq 0$.

Exemplul 3.2.4 *Să se determine ecuaţia suprafeţei conice Σ care are vârful în punctul $V(1, 1, 1)$ şi are curba directoare*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Pentru început să observăm că vârful V *poate fi privit ca intersecţia planelor*

$$P : x - 1 = 0,\ Q : y - 1 = 0 \text{ şi } R : z - 1 = 0,$$

adică avem

$$V : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

Familia de drepte din spaţiu care trec prin vârful V *este*

$$D_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - 1 - \lambda(z - 1) = 0 \\ y - 1 - \mu(z - 1) = 0, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de drepte $D_{\lambda\mu}$ *doar acele drepte care au un punct comun cu curba directoare* C. *Prin urmare, selectăm acele valori* λ *şi* μ *pentru care sistemul*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - 1 - \lambda(z - 1) = 0 \\ y - 1 - \mu(z - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y *şi* z. *Din prima, a doua şi ultima ecuaţie găsim*

$$z = 0,\ x = 1 - \lambda \text{ şi } y = 1 - \mu.$$

*Rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului* $(\mathcal{S})$ *este*

$$(1 - \lambda)^2 + (1 - \mu)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = (1 - \lambda)^2 + (1 - \mu)^2 - 4.$$

Presupunând că $z - 1 \neq 0$ *şi înlocuind în condiţia de contact*

$$\lambda = \frac{x - 1}{z - 1} \text{ şi } \mu = \frac{y - 1}{z - 1},$$

găsim că ecuaţia submulţimii

$$\Sigma' = \Sigma \backslash \{M(x, y, z) \mid z - 1 = 0\}$$

a suprafeţei conice Σ *este*

$$\Sigma' : \left(1 - \frac{x - 1}{z - 1}\right)^2 + \left(1 - \frac{y - 1}{z - 1}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \Sigma' : (z - x)^2 + (z - y)^2 = 4(z - 1)^2.$$

Deoarece planul $R : z - 1 = 0$ *nu are nici un punct comun cu curba directoare*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

rezultă că ecuaţia suprafeţei conice Σ *de curbă directoare* C *şi vârf* V *este*

$$\Sigma : (z - x)^2 + (z - y)^2 - 4(z - 1)^2 = 0.$$

3.3 Suprafețe de rotație

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

este o curbă în spaţiu şi să considerăm că

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

este o dreaptă din spaţiu care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este direcţionată de vectorul liber $\overline{v}(l, m, n)$.

Definiţia 3.3.1 *Suprafaţa $\Sigma \subset E_3$ obţinută prin rotirea curbei C în jurul dreptei fixe D se numeşte* ***suprafaţă de rotaţie*** *de* ***curbă generatoare*** *C şi* ***axă de rotaţie*** *D.*

Teorema 3.3.2 *Suprafaţa de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană de forma*

$$\Sigma : \Phi\left(\pm\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},\ lx + my + nz\right) = 0,$$

unde funcţia Φ se numeşte ***funcţia de contact*** *a suprafeţei de rotaţie Σ.*

Demonstraţie. Pentru a descrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D să notăm că suprafaţa de rotaţie Σ poate fi gândită ca reuniunea tuturor cercurilor care se sprijină pe curba C, au centrele pe axa de rotaţie D şi sunt situate în plane perpendiculare pe dreapta D.

Deoarece un cerc arbitrar din spaţiu cu centrul pe dreapta D, care este situat într-un plan perpendicular pe dreapta D, poate fi descris ca intersecţia dintre o sferă de rază arbitrară şi centru în punctul M_0 şi un plan perpendicular pe dreapta D, rezultă că mulţimea tuturor cercurilor din spaţiu cu centrul pe dreapta D şi situate în plane perpendiculare pe dreapta D este reprezentată de familia de cercuri

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de cercuri $C_{\lambda\mu}$ doar acele cercuri care au un punct comun cu curba generatoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

este compatibil (i.e. are cel puţin o soluţie în necunoscutele x, y şi z). Deoarece sistemul $(\mathcal{S})$ este un sistem cu patru ecuaţii şi trei necunoscute x, y şi z, rezultă că valorile λ

şi μ trebuie să satisfacă o condiţie de compatibilitate (*condiţie de contact*) despre care presupunem că are forma

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0.$$

În concluzie, ţinând cont de faptul că

$$\lambda = \pm\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \text{ şi } \mu = lx + my + nz,$$

deducem că ecuaţia carteziană a suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este

$$\Sigma : \Phi\left(\pm\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},\ lx + my + nz\right) = 0.$$

■

Exemplul 3.3.3 *Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ care se obţine prin rotirea curbei generatoare*

$$C : \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

în jurul axei de rotaţie

$$D : x = y = z.$$

Din ecuaţiile axei de rotaţie D deducem că

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \text{ şi } l = m = n = 1.$$

Familia de cercuri din spaţiu cu centrul pe dreapta D şi situate în plane perpendiculare pe dreapta D este dată de

$$C_{\lambda\mu} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu, \end{cases}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Selectăm acum din familia de cercuri $C_{\lambda\mu}$ doar acele cercuri care au un punct comun cu curba generatoare C. Prin urmare, selectăm acele valori λ şi μ pentru care sistemul

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \\ x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

este compatibil în necunoscutele x, y şi z. Scăzând a treia ecuaţie din prima ecuaţie, respectiv a patra din a doua, găsim

$$3y^2 = \lambda^2 - 5 \text{ şi } y = \mu + 3.$$

*Rezultă că condiţia de compatibilitate (**de contact**) a sistemului $(\mathcal{S})$ este*

$$3(\mu + 3)^2 = \lambda^2 - 5 \Leftrightarrow \Phi(\lambda, \mu) = 0,$$

unde

$$\Phi(\lambda, \mu) = 3(\mu + 3)^2 - \lambda^2 + 5.$$

Înlocuind în condiţia de contact

$$\lambda = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ şi } \mu = x + y + z,$$

găsim că ecuaţia suprafeţei de rotaţie Σ de curbă generatoare C şi axă de rotaţie D este

$$\Sigma : 3(x + y + z + 3)^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 5 = 0.$$

3.4 Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice Σ, care are generatoarele paralele cu dreapta d şi are curba directoare Γ, în următoarele cazuri:

   (a) $\Gamma : x^2 + 2y^2 - z = 0,\ x - 1 = 0$ şi $d : x + y = 0,\ z = 0$.

   (b) $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ 2x - 3y + z = 0$ şi dreapta d are vectorul director $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$.

   (c) $\Gamma : x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0,\ t \in [0, 2\pi]$ şi dreapta d are parametrii directori $(-1, 3, -2)$.

Rezolvare. (a) Fie sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ale cărui soluţii (obţinute doar din ultimele trei ecuaţii) sunt $x = 1$, $y = \lambda - 1$ şi $z = \mu$. Condiţia de compatibilitate algebrică (de sprijin, din punct de vedere geometric) este $1 + 2(\lambda - 1)^2 - \mu = 0$. În concluzie, ţinând cont că $\lambda = x + y$ şi $\mu = z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$\Sigma : 2(x + y - 1)^2 - z + 1 = 0.$$

(b) Să considerăm dreapta d care trece prin origine şi este direcţionată de $\overline{v}$, ale cărei ecuaţii sunt

$$d : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow d : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 2y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ 2y - z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

este $x = (2\mu - \lambda)/3$, $y = (\mu - 2\lambda)/3$ şi $z = -(\mu + 4\lambda)/3$. Condiţia de compatibilitate (de sprijin) se reduce la

$$(2\mu - \lambda)^2 + (\mu - 2\lambda)^2 + (\mu + 4\lambda)^2 = 9 \Leftrightarrow 2\mu^2 + 7\lambda^2 = 3.$$

Deoarece $\lambda = x - 2y$ şi $\mu = 2y - z$, deducem că ecuaţia suprafeţei cilindrice căutate este

$$\Sigma : 2(2y - z)^2 + 7(x - 2y)^2 = 3.$$

(c) Ecuaţia carteziană a curbei Γ (ca intersecţie de suprafeţe) este

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

iar o dreaptă cu parametri directori $(-1, 3, -2)$ este

$$d: \frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2} \Leftrightarrow d: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x + z = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \\ 3x + y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ -2x + z = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

găsim $x = -\mu/2$, $y = (2\lambda + 3\mu)/2$ şi $z = 0$. Condiţia de compatibilitate a sistemului este $\mu^2 + (2\lambda + 3\mu)^2 = 4$. Ţinând cont de faptul că $\lambda = 3x + y$ şi $\mu = -2x + z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$\Sigma : (z - 2x)^2 + (2y + 3z)^2 = 4.$$

■

2. Să se determine ecuaţiile carteziene care descriu proiecţia curbei în spaţiu

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

pe planul xOy.

Rezolvare. Deoarece planul xOy are ca direcţie normală axa Oz, să considerăm cilindrul având curba directoare Γ şi generatoarele paralele cu axa $Oz : x = 0, y = 0$. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \\ x = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

are soluţia $x = \lambda$, $y = \mu$ şi $z = 2\lambda - 1$. Condiţia de compatibilitate a sistemului este $\lambda^2 + \mu(2\lambda - 1) = 0$. Obţinem ecuaţia cilindrului

$$\Sigma : x^2 + 2xy - y = 0.$$

Intersecţia cilindrului Σ cu planul xOy conduce la determinarea proiecţiei căutate:

$$\Gamma' = \Pr_{xOy} \Gamma : \begin{cases} x^2 + 2xy - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

■

3. Să se demonstreze că proiecţia *curbei lui Viviani*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx, \quad R > 0, \end{cases}$$

pe planul xOz este o parabolă.

Rezolvare. Se scrie ecuaţia cilindrului care are curba directoare Γ şi generatoarele paralele cu axa Oy, apoi se face intersecţia acestuia cu planul xOz. Ecuaţiile generatoarele acestui cilindru sunt $x = \lambda$, $z = \mu$. Obţinem $y = \pm\sqrt{R^2 - \lambda^2 - \mu^2}$ şi condiţia de sprijin $\mu^2 + R\lambda - R^2 = 0$. În concluzie, proiecţia curbei lui Viviani pe planul xOz este parabola

$$\Gamma' = \Pr_{xOz} \Gamma : \begin{cases} z^2 + Rx - R^2 = 0, & R > 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

■

4. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful V, situat la intersecţia dintre planele $x + 3z - 10 = 0$, $y - 2 = 0$ şi $x - z + 2 = 0$, şi care are drept curbă directoare curba

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 - 2x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Să considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - 2x = 0 \\ y = 0 \\ x + 3z - 10 - \lambda(y - 2) = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ y - 2 - \mu(x - z + 2) = 0, & \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt

$$x = \frac{2\mu - \lambda\mu - 3}{2\mu}, \quad y = 0, \quad z = \frac{6\mu - \lambda\mu + 1}{2\mu}.$$

Condiţia de compatibilitate (de sprijin) este

$$\frac{(2\mu - \lambda\mu - 3)^2}{4\mu^2} + \frac{(6\mu - \lambda\mu + 1)^2}{4\mu^2} = \frac{2\mu - \lambda\mu - 3}{\mu}.$$

Aceasta conduce, în urma calculelor, la suprafaţa conică

$$\Sigma' : (y - 2x)^2 + (3y - 2z)^2 = (y - 2)(2y - 4x),$$

unde $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid (y - 2)(x - z + 2) = 0\}$. ■

5. Să se determine locul geometric Σ descris de tangentele duse din origine la sfera

$$S : (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16.$$

Rezolvare. Mulţimea tuturor dreptelor din spaţiu, care trec prin originea sistemului de axe, este descrisă de fascicolul

$$d_{\lambda\mu} : \begin{cases} x - \lambda y = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ y - \mu z = 0, & \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Condiţia de tangenţă la sferă a dreptelor $d_{\lambda\mu}$ este determinată de condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \mu z = 0 \end{cases}$$

să aibă soluţie unică. Deoarece $x = \lambda\mu z$ şi $y = \mu z$, deducem că ecuaţia de gradul doi

$$(\lambda\mu z - 5)^2 + (\mu z + 1)^2 + z^2 = 16$$

trebuie să aibă discriminantul egal cu zero. Rezultă că avem condiţia de sprijin $15\lambda^2\mu^2 - 9\mu^2 - 10\lambda\mu^2 - 10 = 0$, din care obţinem ecuaţia suprafeţei conice

$$\Sigma' : 15x^2 - 9y^2 - 10xy - 10z^2 = 0,$$

unde $\Sigma' = \Sigma \backslash \{P(x, y, z) \mid y \cdot z = 0\}$. ■

6. Să se scrie ecuaţia conului de rotaţie în jurul axei Oz, ale cărui generatoare fac unghiuri de 45° cu axele de coordonate.

   Rezolvare. Descriem conul de rotaţie ca fiind obţinut prin rotirea curbei directoare (dreptei)

$$\Gamma : \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

   în jurul axei de rotaţie

$$Oz : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

   Condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \\ z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   este $2\lambda^2 = \mu^2$. Deducem că ecuaţia conului căutat este $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2$. ■

7. Să se determine ecuaţia *torului circular* obţinut prin rotirea cercului

$$\Gamma : \begin{cases} (x - R)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad R > \rho > 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

   în jurul axei Oz.

   Rezolvare. Condiţia de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} (x - R)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ y = 0 \\ z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   este $(\pm\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} - R)^2 + \lambda^2 = \rho^2$. Rezultă ecuaţia carteziană a torului circular

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - \rho^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

   ■

8. Să se determine ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea *astroidei*

$$\Gamma : \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

în jurul axei Oy.

Rezolvare. Ecuaţiile cercurilor generatoare sunt

$$C_{\lambda\mu}: \begin{cases} y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deducem că condiţia de sprijin pe astroida Γ este $\sqrt[3]{\mu^2 - \lambda^2} + \sqrt[3]{\lambda^2} = 1$. Obţinem ecuaţia suprafeţei căutate ca fiind

$$\Sigma: \sqrt[3]{x^2 + z^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1.$$

■

9. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generate de drepte care se sprijină pe axa Oz şi curba

$$\Gamma: \begin{cases} y^2 - 2z + 2 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

şi care rămân paralele cu planul xOy.

Rezolvare. Deoarece planul xOy este descris de ecuaţia $z = 0$ iar axa Oz are ecuaţiile

$$Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

rezultă că generatoarele suprafeţei căutate sunt

$$d_{\lambda\mu}: \begin{cases} z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x - \mu y = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Condiţia de sprijin pe curba Γ este

$$2\lambda\mu^2 - 2\lambda - 2\mu^2 + 1 = 0, \ \lambda \geq \frac{1}{2},$$

şi, deci, obţinem suprafaţa de ecuaţie

$$\Sigma: 2zx^2 - 2zy^2 - 2x^2 + y^2 = 0, \ y \neq 0, \ z \geq \frac{1}{2}.$$

■

10. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generate de dreptele care se sprijină pe axa Oz şi curba $\Gamma: x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$, unde $t \in \mathbb{R}$, şi care rămân paralele cu planul xOy.

Rezolvare. Generatoarele suprafeţei sunt

$$d_{\lambda\mu}: \begin{cases} z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ x - \mu y = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

iar ecuaţia carteziană a curbei Γ este

$$\Gamma: \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3. \end{cases}$$

Condiţia de compatibilitate se reduce la $\lambda = \lambda^2\mu^3$ şi conduce la suprafaţa de ecuaţie

$$\Sigma: z(y^3 - zx^3) = 0, \ y \neq 0.$$

■

3.5 Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu direcţia dată de vectorul $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, având drept curbă directoare curba

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

R. $\Sigma : (2x + y - 2)^2 - (x + z - 1)^2 = 1.$

2. Să se determine ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare sunt paralele cu dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

şi tangente la cuadrica $\Sigma : x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 8y + 1 = 0.$

R. $\Sigma : (x - 2y - 1)^2 + 4(y + z + 1)^2 + 2(x - 2y - 1)(y + z) - 2x - 4z - 4 = 0.$

3. Să se determine proiecţia ortogonală a curbei

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

pe planul $\pi : x - y + 2z - 1 = 0.$

R. Proiecţia căutată este curba plană

$$\Gamma' = \Pr_{\pi} \Gamma : \begin{cases} 2(2x - z + 4)^2 + (x + 3y + z - 4)^2 - 6(-2x + z + 8) = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Punctele paraboloidului hiperbolic $\Sigma : z = xy$ sunt proiectate pe planul xOy după direcţia dată de dreapta $d : x = y = z$. Să se găsească ecuaţiile acestei proiecţii şi să se reprezinte grafic.

R. Proiecţia paraboloidului hiperbolic Σ pe planul xOy este reuniunea curbelor plane

$$\Gamma_k : \begin{cases} (x - z + k)(y - z + k) = k \\ z = 0, \end{cases}$$

unde $k \in \mathbb{R}$, adică avem $\Pr_{xOy} \Sigma = \cup_{k \in \mathbb{R}} \Gamma_k$.

5. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în originea sistemului de axe şi având curba directoare

$$\Gamma : \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

R. $\Sigma : 15x^2 + 5y^2 - (2y + z)(x + y + z) = 0$, unde $y \neq 0$, $z \neq 0$ şi $x + y + z \neq 0$.

6. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $V(0, 1, 1)$, ale cărei generatoare se sprijină pe curba

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

R. $\Sigma : x^2 + 2(x - y + z)^2 + 3(x - 2y + 2z)^2 = 6(x - 2y + z + 1)^2$, unde $y \neq 1$, $z \neq 1$ şi $x - 2y + z + 1 \neq 0$.

7. Să se determine ecuaţia conului cu vârful în originea $O(0, 0, 0)$ şi tangent sferei de ecuaţie $S : x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 9 = 0$.

   R. $\Sigma : 9x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$, unde $y \neq 0$ şi $z \neq 0$.

8. Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinută prin rotirea dreptei

$$d : \frac{x - 7}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

   în jurul axei Oz.

   R. $\Sigma : x^2 + y^2 - 4z^2 - 49 = 0$.

9. Să se determine suprafaţa descrisă de curba

$$\Gamma : \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

   când se roteşte în jurul axei Oz.

   R. $\Sigma : 2\left(\pm\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} - 2\right)^2 + z^2 = 1.$

10. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de drepte paralele cu planul xOy, care se sprijină pe axa Oz şi pe dreapta

$$d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

   R. $\Sigma : xz + 2yz - 3x = 0$, unde $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.

11. Să se afle ecuaţia suprafeţei descrisă de o dreaptă mobilă care rămâne paralelă cu planul $\pi : x + z = 0$ şi se sprijină atât pe axa Oz cât şi pe cercul $C : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

   R. $\Sigma : (x^2 + y^2)(x + z)^2 = x^2$, unde $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.

12. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de drepte variabile care se sprijină pe dreptele $d_1 : x = 0,\ y + 1 = 0$, $d_2 : x = y - 1 = z$ şi parabola $\Gamma : y^2 - 2z = 0,\ z = 0$.

   R. $\Sigma : -2xy + xz + yz + z = 0$, unde $y + 1 \neq 0$ şi $y - z - 1 \neq 0$.

13. Să se determine suprafaţa descrisă de o dreaptă variabilă care se sprijină pe trei muchii ale unui cub, necoplanare două câte două.

   R. Fie $OABCO'A'B'C'$, unde OA, OB şi OO' reprezintă direcţiile axelor de coordonate Ox, Oy şi Oz. Presupunem (fără a restrânge generalitatea) că cubul are muchiile de lungime $l = 1$. Atunci dreptele necoplanare, pe care se sprijină dreapta mobilă, pot fi

$$OO' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},\ BC : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ şi } A'C' : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}.$$

   În acest context, suprafaţa căutată are ecuaţia

$$\Sigma : xy + xz - yz - x = 0,$$

unde $x \neq 0$, $y \neq 0$ şi $z \neq 0$. Prin reducere la forma canonică, se poate arăta că suprafaţa Σ este un hiperboloid cu o pânză. În concluzie, suprafaţa descrisă de o dreaptă variabilă care se sprijină pe muchiile OO', BC şi $A'C'$ ale cubului este hiperboloidul cu o pânză Σ, din care se scot punctele sale de intersecţie cu planele $x = 0$, $y = 0$ şi $z = 0$.

14. Să se determine cuadrica ce conţine curbele:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} y^2 + z^2 = 2 \\ x = 1, \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} y^2 + z^2 = 3 \\ x = -2, \end{cases} \quad \Gamma_3 : \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = -5. \end{cases}$$

R. $\Sigma : 3y^2 + 3z^2 + x - 7 = 0$.

4. CURBE PLANE

În acest capitol vom defini riguros *curbele plane* şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă o mărime scalară (*curbură*) care ne va da informaţii asupra formei unei curbe plane. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

4.1 Definiții și exemple

Definiţia 4.1.1 *O aplicaţie diferenţiabilă* $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*, unde* I *este un interval real, definită prin*

$$c(t) = (x(t), y(t)), \ \forall\ t \in I,$$

unde

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \ \forall\ t \in I,$$

se numeşte ***parametrizare regulată****.*

Definiţia 4.1.2 *Variabila* $t \in I$*, care defineşte parametrizarea regulată* $c(t)$*, se numeşte* ***parametru****.*

Definiţia 4.1.3 *Mulţimea de puncte din plan*

$$\operatorname{Im} c \overset{not}{=} \{P(x(t), y(t)) \mid t \in I\} \subset E_2,$$

care reprezintă imaginea unei parametrizări regulate $c(t)$*, se numeşte* ***curbă plană parametrizată regulată****. Dacă un punct* $P(x(t_0), y(t_0))$ *are proprietatea*

$$(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 = 0,$$

atunci punctul P *se numeşte* ***punct singular*** *al curbei parametrizate* $\operatorname{Im} c$*.*

Definiţia 4.1.4 *O mulţime nevidă* C *de puncte din plan cu proprietatea că pentru fiecare punct* $M_0(x_0, y_0) \in C$ *există în* $\mathbb{R}^2$ *o vecinătate* V *a punctului* M_0 *şi există o parametrizare regulată*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

astfel încât

$$C \cap V = \operatorname{Im} c$$

se numeşte ***curbă plană****.*

Observaţia 4.1.5 *Intuitiv vorbind, o mulţime nevidă* C *de puncte din plan este o curbă plană dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct* $M_0 \in C$ *curba plană poate fi identificată cu imaginea unei parametrizări regulate.*

Observaţia 4.1.6 *Este evident că orice curbă plană parametrizată este o curbă plană.*

Exemplul 4.1.7 *Fie aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

unde $r > 0$. *Deoarece funcţiile*

$$x(t) = r \cos t \text{ şi } y(t) = r \sin t$$

verifică relaţia

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2 \neq 0, \ \forall \ t \in [0, 2\pi),$$

rezultă că aplicaţia diferenţiabilă c *este o parametrizare regulată.*

Deoarece imaginea parametrizării regulate c *este mulţimea de puncte*

$$\operatorname{Im} c = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\},$$

rezultă că cercul centrat în originea $O(0, 0)$ *şi de rază* $r > 0$, *definit de ecuaţia*

$$C : x^2 + y^2 = r^2,$$

este o curbă plană. Este important de subliniat însă că cercul C *mai poate fi privit, spre exemplu, şi ca imaginea parametrizării regulate*

$$\widetilde{c} : [0, \pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$\widetilde{c}(\tau) = (r \sin 2\tau, r \cos 2\tau).$$

Observaţia 4.1.8 *O curbă plană poate fi privită ca imaginea mai multor parametrizări regulate distincte.*

Exemplul 4.1.9 *Să considerăm mulţimea de puncte din plan*

$$C : x^3 - y^3 + 2xy = 0.$$

Pentru a studia dacă mulţimea de puncte C *este o curbă plană vom căuta o parametrizare regulată* $x(t)$ *şi* $y(t)$ *a mulţimii de puncte* C *de forma*

$$y = tx.$$

Cu alte cuvinte, vom căuta $x(t)$ *astfel încât să avem adevărată relaţia*

$$x^3 - t^3x^3 + 2tx^2 = 0, \ \forall \ t, x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $x \neq 0$ *şi* $t \neq 1$ *deducem că avem*

$$x = \frac{2t}{t^3 - 1} \text{ şi } y = \frac{2t^2}{t^3 - 1}.$$

Prin urmare, considerând parametrizarea regulată

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = \left(\frac{2t}{t^3 - 1}, \frac{2t^2}{t^3 - 1}\right),$$

obţinem că avem adevărată relaţia

$$C\backslash\{O(0, 0)\} = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, mulţimea de puncte $C\backslash\{O(0, 0)\}$ *este o curbă plană.*

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^2$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x, y) \in D$ vectorul

$$grad(f)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right),$$

unde $\partial f/\partial x \stackrel{not}{=} f_x$ şi $\partial f/\partial y \stackrel{not}{=} f_y$ reprezintă derivatele parţiale ale funcţiei $f(x, y)$, se numeşte *gradientul* funcţiei f în punctul $P(x, y)$.

Definiţia 4.1.10 *Un punct* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *care verifică relaţia*

$$grad(f)(M_0) \neq (0, 0)$$

se numeşte ***punct regulat*** *al funcţiei* f*. Un punct* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *care nu este regulat se numeşte* ***punct singular*** *al funcţiei* f*.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 4.1.11 *Mulţimea de puncte din plan* $P(x, y) \in E_2$ *ale căror coordonate verifică relaţia*

$$C : f(x, y) = 0,$$

unde

$$grad(f)(P) \neq (0, 0), \ \forall\ P \in C,$$

este o curbă plană.

Demonstraţie. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0) \in C$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte C (i.e. $f(x_0, y_0) = 0$ şi $grad(f)(M_0) \neq (0, 0)$). Deoarece condiţia

$$grad(f)(M_0) \neq (0, 0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)^2 \neq 0,$$

să presupunem că

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei f şi punctului $M_0(x_0, y_0)$, deducem că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ şi există o funcţie derivabilă

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\varphi(x_0) = y_0,\ f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0,\ \forall\, x \in I.$$

Prin derivare, din ultimele relaţii obţinem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0,\ \forall\, x \in I,$$

adică

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},\ \forall\, x \in I.$$

Să considerăm acum aplicaţia diferenţiabilă

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (t, \varphi(t)).$$

Deoarece condiţia

$$grad(f)(P) \neq (0, 0),\ \forall\, P \in C,$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)^2 \neq 0,\ \forall\, P \in C,$$

deducem că

$$1 + (\varphi'(t))^2 = 1 + \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))\right)^2} \neq 0,\ \forall\, t \in I,$$

adică deducem că aplicaţia diferenţiabilă $c(t)$ este o parametrizare regulată. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^2$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0) \in C$, obţinem că

$$C \cap V = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0) \in C$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte C este o curbă plană. ■

Definiţia 4.1.12 *O curbă plană definită ca în teorema precedentă se numeşte* ***curbă plană definită implicit****.*

Corolarul 4.1.13 *Orice conică cu proprietatea că nu conţine nici un centru de simetrie (i.e.* ***elipsa****, în particular* ***cercul****,* ***hiperbola****,* ***parabola****,* ***reuniunea de drepte paralele*** *sau* ***confundate*** *şi* ***mulţimea vidă****) este o curbă plană.*

Demonstraţie. Fie Γ o conică arbitrară care nu conţine nici un centru de simetrie şi care este definită implicit de ecuaţia

$$\Gamma : g(x, y) = 0,$$

unde

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Vom demonstra prin reducere la absurd că

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P)\right)^2 \neq 0, \ \forall \ P(x, y) \in \Gamma.$$

Să presupunem prin absurd că există un punct din plan $M_0(x_0, y_0)$ aparţinând conicei Γ care verifică relaţia

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)^2 = 0.$$

Atunci, deducem imediat că

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

adică punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un centru de simetrie al conicei Γ. Acest lucru se află în contradicţie cu ipoteza că conica Γ nu conţine nici un centru de simetrie.

În concluzie, conica Γ este o curbă plană. ■

Exemplul 4.1.14 *Elipsa de ecuaţie carteziană implicită*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$*, este o curbă plană. O parametrizare regulată a elipsei* (E) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(E) = \operatorname{Im} c.$$

Exemplul 4.1.15 *Hiperbola de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$*, este o curbă plană. O parametrizare regulată a ramurii din dreapta axei* Oy *a hiperbolei* (H) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c_1(t) = (a\cosh t, b\sinh t),$$

unde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ şi } \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

iar o parametrizare regulată a ramurii din stânga axei Oy a hiperbolei (H) este determinată de aplicaţia diferenţiabilă

$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c_2(t) = (-a\cosh t, b\sinh t).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(H) = \operatorname{Im} c_1 \cup \operatorname{Im} c_2.$$

Exemplul 4.1.16 *Parabola de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P) : y^2 - 2px = 0,$$

unde $p > 0$, este o curbă plană. O parametrizare regulată a parabolei (P) este determinată de aplicaţia diferenţiabilă

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$c(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$(P) = \operatorname{Im} c.$$

Observaţia 4.1.17 *Din cele descrise până acum deducem că o* ***curbă plană*** *poate fi descrisă în două feluri:*

(1) ***parametric*** *(ca imaginea unei parametrizări regulate $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$);*

(2) ***implicit*** *(ca o mulţime de puncte regulate $C : f(x, y) = 0$).*

Observaţia 4.1.18 *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice curbă plană definită implicit poate fi parametrizată local, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală regulată este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări regulate locale pentru curbele plane definite implicit (vezi exemplele de mai sus).*

4.2 Dreaptă tangentă și dreaptă normală

4.2.1 Curbe parametrizate

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (x(t), y(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată şi să considerăm că

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0)),$$

unde $t_0 \in I$, este un punct arbitrar fixat al curbei C. Interpretarea geometrică a derivatei aplicaţiei c în punctul t_0 implică faptul că că vectorul liber

$$\dot{c}(t_0) \stackrel{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{c(t_0 + h) - c(t_0)}{h},$$

este tangent la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

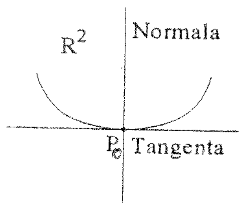
Definiţia 4.2.2 *Vectorul liber nenul*

$$\dot{c}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

se numeşte ***vectorul tangent (viteză)*** *la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$.*

Definiţia 4.2.3 *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 4.2.4 *Dreapta $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este perpendiculară pe vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la curba C în punctul P_0.*



Tangenta şi normala unei curbe plane

Din geometria analitică în plan rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 4.2.5 *Ecuaţiile dreptelor tangentă $T_{P_0}C$ şi normală $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

şi

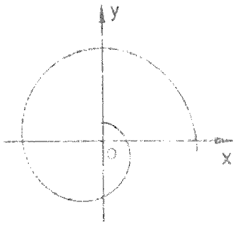
$$N_{P_0}C : (x - x(t_0)) \cdot x'(t_0) + (y - y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0.$$

Exemplul 4.2.6 *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul*

$$P_0 \left(t_0 = \frac{\pi}{4} \right)$$

la ***spirala logaritmică*** *$\mathcal{S} = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = \left(e^{-t}(\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t + \sin t) \right).$$



Spirala logaritmică $\mathcal{S}$

Este evident că avem

$$x(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t) \text{ şi } y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = -2e^{-t}\cos t \text{ şi } y'(t) = -2e^{-t}\sin t.$$

Calculând toate entităţile anterioare pentru

$$t_0 = \frac{\pi}{4},$$

găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{S} : \frac{x}{-e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}} = \frac{y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{-e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}} \Leftrightarrow T_{P_0}\mathcal{S} : x - y + e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} = 0$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{S} : -e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}x - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\left(y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow N_{P_0}\mathcal{S} : x + y - e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} = 0.$$

4.2.2 Curbe definite implicit

Să considerăm că $C : f(x, y) = 0$, unde

$$grad(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) \neq (0, 0),\ \forall\ P \in C,$$

este o curbă plană definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar fixat al curbei C (i.e. $f(x_0, y_0) = 0$). Fie

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (x(t), y(t)),$$

o parametrizare regulată a curbei C în vecinătatea punctului $P_0(x_0, y_0)$. Atunci există $t_0 \in I$ astfel încât

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0)) = P_0(x_0, y_0)$$

şi

$$f(x(t), y(t)) = 0, \ \forall\, t \in I.$$

Derivând ultima egalitate în raport cu t şi calculând totul în punctul t_0, deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x'(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y'(t_0)) = 0 \Leftrightarrow \langle grad(f)(P_0), \dot{c}(t_0)\rangle = 0,$$

adică vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe vectorul $\dot{c}(t_0)$ care este tangent la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0) = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

Definiţia 4.2.3 *Vectorul liber nenul*

$$grad(f)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$$

se numeşte ***vectorul normal*** *la curba C în punctul $P_0(x_0, y_0)$.*

Definiţia 4.2.4 *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi care este perpendiculară pe vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 4.2.5 *Dreapta $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi care este direcţionată de vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la curba C în punctul P_0.*

Din geometria analitică în plan rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 4.2.6 *Ecuaţiile dreptelor tangentă $T_{P_0}C$ şi normală $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$$

şi

$$N_{P_0}C : \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)}.$$

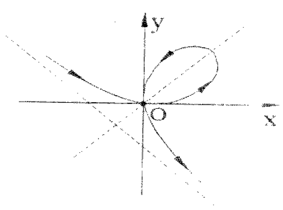
Exemplul 4.2.7 *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei în punctul*

$$P_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$$

la ***foliul lui Descartes***

$$\mathcal{F} : x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

unde $a > 0$ şi $x^2 + y^2 \neq 0$.



Foliul lui Descartes $\mathcal{F}$

Prin derivări parţiale obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \ \text{şi} \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax,$$

unde

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy.$$

Calculând aceste derivate parţiale în punctul P_0*, obţinem*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{9a^2}{4} \ \text{şi} \ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{9a^2}{4}.$$

În concluzie, găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{F} : \left(x - \frac{3a}{2}\right) \cdot \frac{9a^2}{4} + \left(y - \frac{3a}{2}\right) \cdot \frac{9a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow T_{P_0}\mathcal{F} : x + y - 3a = 0$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{F} : \frac{x - \dfrac{3a}{2}}{\dfrac{9a^2}{4}} = \frac{y - \dfrac{3a}{2}}{\dfrac{9a^2}{4}} \Leftrightarrow N_{P_0}\mathcal{F} : x - y = 0.$$

4.3 Reperul lui Frénet. Curbura unei curbe plane

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (x(t), y(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată.

Definiţia 4.3.1 *Vectorul liber nenul*

$$T(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot (x'(t), y'(t))$$

se numeşte ***versorul tangent*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$*.*

Definiţia 4.3.2 *Vectorul liber nenul*

$$N(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \mathcal{R}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot (-y'(t), x'(t)),$$

unde

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \mathcal{R}(x,y) = (-y, x),$$

este o rotaţie în sens trigonometric de unghi 90°*, se numeşte* ***versorul normal*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$*.*

Observaţia 4.3.3 *Folosind definiţia produsului scalar în spaţiul* $\mathbb{R}^2$*, se verifică uşor că avem*

$$||T(t)||^2 = ||N(t)||^2 = 1 \text{ și } \langle T(t), N(t)\rangle = 0, \ \forall\, t \in I,$$

adică reperele

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t)\}, \ \forall\, t \in I,$$

sunt repere ortonormate în planul geometric euclidian E_2.

Definiţia 4.3.4 *Reperul ortonormat mobil*

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t);\ T(t), N(t)\},$$

unde $t \in I$*, se numeşte* ***reperul lui Frénet*** *asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Să considerăm acum vectorul liber

$$\ddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x''(t), y''(t))$$

numit vectorul *acceleraţie* în punctul $P = c(t)$. În acest context, putem introduce următorul concept geometric:

Definiţia 4.3.5 *Numărul real*

$$k(t) \stackrel{def}{=} \frac{\langle \ddot{c}(t), \mathcal{R}(\dot{c}(t))\rangle}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***curbura*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Studiind acum variaţia versorilor reperului lui Frénet, putem demonstra următorul rezultat geometric important:

Teorema 4.3.6 *Versorii* $T(t)$ *şi* $N(t)$ *ai reperului lui Frénet asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$ *verifică următoarele* ***formule Frénet:***

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(t) \cdot v(t) \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -k(t) \cdot v(t) \cdot T(t), \end{cases}$$

unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ *reprezintă* ***viteza*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Demonstraţie. Deoarece baza $B_t = \{T(t), N(t)\}$ este ortonormată, rezultă că următoarele descompuneri sunt adevărate:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t). \end{cases}$$

Derivând acum relaţiile

$$\langle T(t), T(t)\rangle = \langle N(t), N(t)\rangle = 1 \text{ şi } \langle T(t), N(t)\rangle = 0$$

deducem că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, T(t) \right\rangle = \left\langle \frac{dN}{dt}, N(t) \right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle \frac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle + \left\langle \frac{dN}{dt}, T(t) \right\rangle = 0,$$

adică avem adevărate descompunerile

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot T(t). \end{cases}$$

Deoarece, prin derivare directă, obţinem

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle}{||\dot{c}(t)||^3} \cdot \dot{c}(t) + \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t),$$

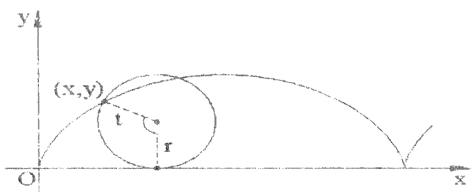
găsim că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle = \frac{\langle \ddot{c}(t), \mathcal{R}(\dot{c}(t)) \rangle}{||\dot{c}(t)||^2} = k(t) \cdot v(t),$$

adică ceea ce aveam de demonstrat. ■

Exemplul 4.3.7 *Curba descrisă de un punct M aflat pe un cerc de rază $r > 0$ care se rostogoleşte fără alunecare de-a lungul axei Ox se numeşte **cicloidă**. Să se calculeze elementele reperului lui Frénet şi curbura într-un punct arbitrar al cicloidei $\mathcal{C} = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \backslash \{ \ 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)).$$



Cicloida $\mathcal{C}$

Este evident că avem

$$x(t) = r(t - \sin t) \text{ şi } y(t) = r(1 - \cos t).$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = r(1 - \cos t) \text{ şi } y'(t) = r \sin t,$$

adică

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t).$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}(t)|| = r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos t} = 2r \left| \sin \frac{t}{2} \right|,$$

deducem că

$$T(t)=\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot\dot{c}(t)=\frac{1}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}\cdot\left(\sin^2\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$$

şi

$$N(t)=\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\cdot\mathcal{R}(\dot{c}(t))=\frac{1}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}\cdot\left(-\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},\sin^2\frac{t}{2}\right),$$

unde $t\in\mathbb{R}\backslash\{\ 2l\pi\mid l\in\mathbb{Z}\}$.

Derivând încă o dată, găsim

$$x''(t)=r\sin t \text{ şi } y''(t)=r\cos t.$$

Prin urmare, curbura cicloidei este

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{3/2}}=\frac{-1}{4r\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|},\ \forall\ t\in\mathbb{R}\backslash\{\ 2l\pi\mid l\in\mathbb{Z}\}.$$

4.4 Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe plane

Fie $c:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ o parametrizare regulată, definită prin

$$c(t)=(x(t),y(t)),$$

şi fie curba plană $C=\operatorname{Im}c$.

Definiţia 4.4.1 *Orice funcţie*

$$\overline{t}:I\subset\mathbb{R}\to J\subset\mathbb{R},\ t\to\overline{t}(t),$$

unde J este un interval real, care este derivabilă, bijectivă şi cu inversa

$$t:J\subset\mathbb{R}\to I\subset\mathbb{R},\ \overline{t}\to t(\overline{t}),$$

derivabilă se numeşte ***schimbare de parametru*** *a curbei $C=\operatorname{Im}c$ iar parametrizarea regulată*

$$\overline{c}:J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \overline{c}(\overline{t})=c(t(\overline{t})),$$

se numeşte ***reparametrizare*** *a curbei $C=\operatorname{Im}c$.*

Observaţia 4.4.2 *Dacă $\overline{t}=\overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba plană parametrizată $C=\operatorname{Im}c$, atunci următoarea egalitate este adevărată*

$$\frac{d\overline{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\overline{t}}=1\Leftrightarrow\frac{dt}{d\overline{t}}=\frac{1}{\dfrac{d\overline{t}}{dt}}.$$

Teorema 4.4.3 *Dacă $\overline{t} = \overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba plană parametrizată $C = \operatorname{Im} c$, atunci următoarele* ***formule de invarianţă*** *sunt adevărate:*

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C,$$

$$\overline{T}(\overline{t}) = \pm T(t), \ \overline{N}(\overline{t}) = \pm N(t),$$

$$\overline{k}(\overline{t}) = \pm k(t), \ \overline{v}(\overline{t}) = \pm v(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{T}}{d\overline{t}} = \overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{N}(\overline{t}) \\ \dfrac{d\overline{N}}{d\overline{t}} = -\overline{k}(\overline{t}) \cdot \overline{v}(\overline{t}) \cdot \overline{T}(\overline{t}), \end{cases}$$

unde semnul "$+$" apare dacă $\dfrac{dt}{d\overline{t}} > 0$ iar semnul "$-$" apare dacă $\dfrac{dt}{d\overline{t}} < 0$.

Demonstraţie. Formulele de mai sus se deduc imediat din relaţiile de derivare a funcţiilor compuse, şi anume

$$\dot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}}$$

şi

$$\ddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \ddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2}.$$

■

Observaţia 4.4.4 *Egalităţile din teorema precedentă ne sugerează că curbele plane parametrizate regulate pot fi privite ca curbe plane* ***orientate (cu un sens de parcurs)****. Intuitiv vorbind, putem aprecia că orientarea unei curbe plane parametrizate $c(t)$ este dată de orientarea geometrică a vectorului tangent $\dot{c}(t)$ ca vector liber legat în punctul $c(t)$. În acest context geometric, o schimbare de parametru $\overline{t} = \overline{t}(t)$ a curbei plane $C = \operatorname{Im} c$* ***păstrează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} > 0$$

şi ***inversează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} < 0.$$

Exemplul 4.4.5 *Fie curba plană parametrizată regulată $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (\sin t, \ln t).$$

Funcţia

$$\overline{t} : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \overline{t}(t) = \ln t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$, având inversa

$$t : \mathbb{R} \to (0, \infty), \ t(\overline{t}) = e^{\overline{t}}.$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\overline{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \overline{c}(\overline{t}) = (\sin e^{\overline{t}}, \overline{t}).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\overline{t}} = e^{\overline{t}} > 0,\ \forall\ \overline{t} \in \mathbb{R},$$

rezultă că schimbarea de parametru $\overline{t}(t) = \ln t$ *păstrează orientarea curbei* C *determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent*

$$\dot{c}(t) = \left(\cos t, \frac{1}{t}\right).$$

Exemplul 4.4.6 *Fie curba plană parametrizată regulată* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (2t, t^2).$$

Funcţia

$$\overline{t} : [0,1] \to [0,2],\ \overline{t}(t) = 2t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$, *având inversa*

$$t : [0,2] \to [0,1],\ t(\overline{t}) = \frac{\overline{t}}{2}.$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\overline{c} : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ \overline{c}(\overline{t}) = \left(\overline{t}, \frac{\overline{t}^2}{4}\right).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{1}{2} > 0,\ \forall\ \overline{t} \in [0,2],$$

rezultă că schimbarea de parametru $\overline{t}(t) = 2t$ *păstrează orientarea curbei* C *determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent*

$$\dot{c}(t) = (2, 2t).$$

Exemplul 4.4.7 *Să se calculeze curbura într-un punct arbitrar al elipsei*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b > 0$. *Deoarece curbura elipsei nu depinde de parametrizarea aleasă (modulo un semn care determină orientarea elipsei* (E)*), subliniem că o parametrizare a elipsei* (E) *este dată de*

$$x(t) = a\cos t \text{ şi } y(t) = b\sin t,$$

unde $t \in [0, 2\pi)$. *Prin derivări succesive, obţinem*

$$\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x''(t) = -a \cos t \\ y''(t) = -b \sin t. \end{cases}$$

Prin urmare, curbura elipsei (E), *considerată ca orientată în sens trigonometric, este*

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi).$$

Observaţia 4.4.8 *În cazul particular al elipsei* (E) *pentru care*

$$a = b = r > 0,$$

adică în cazul cercului (C) *centrat în originea* $O(0,0)$ *şi de rază* r *de ecuaţie*

$$(C) : x^2 + y^2 = r^2,$$

considerat ca orientat în sens trigonometric, obţinem curbura

$$k(t) = \frac{1}{r} = \textit{constant}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi).$$

Pe de altă parte, dacă considerăm semicercul superior al cercului (C) *şi parametrizarea sa orientată în sensul acelor de ceasornic, definită prin*

$$x(\tau) = \tau \text{ şi } y(\tau) = \sqrt{r^2 - \tau^2},$$

unde $\tau \in [-r, r]$, *obţinem curbura*

$$k(\tau) = -\frac{1}{r} = \textit{constant}, \ \forall \ \tau \in [-r, r].$$

4.5 Lungimea unei curbe plane. Parametrizarea canonică

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = (x(t), y(t)), \ a < b,$$

este o curbă plană parametrizată regulată.

Definiţia 4.5.1 ***Lungimea*** *curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *este definită prin formula*

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)|| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt > 0.$$

Observaţia 4.5.2 *Definiţia de mai sus este consistentă din punct de vedere geometric deoarece dacă împărţim curba plană* $C = \operatorname{Im} c$ *în arce de curbă suficient de mici, atunci putem aproxima lungimea acestor arce de curbă cu lungimea segmentelor de dreaptă pe care le subântind. Evident, lungimea curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *se obţine adunând lungimile acestor segmente de dreaptă şi aplicând sumei un procedeu la limită ca la integrale care ne conduce la formula de mai sus.*

Observaţia 4.5.3 *Dacă* $\overline{t} = \overline{t}(t)$ *este o schimbare de parametru pentru curba plană parametrizată* $C = \operatorname{Im} c$, *atunci*
$$L(\overline{C}) = L(C),$$
adică lungimea unei curbe plane nu depinde nici de parametrizare nici de orientare.

Exemplul 4.5.4 *Să se calculeze lungimea cercului* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (r\cos t, r\sin t),\ r > 0.$$

Vectorul tangent într-un punct arbitrar al cercului $C = \operatorname{Im} c$ *este*

$$\dot{c}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

iar norma acestui vector (viteza) este

$$v(t) = ||\dot{c}(t)|| = r,\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

În concluzie, lungimea cercului este

$$L(C) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Teorema 4.5.5 *Dacă* $L > 0$ *este lungimea curbei plane* $C = \operatorname{Im} c$, *atunci funcţia*

$$s : [a, b] \to [0, L],\ s(t) \overset{def}{=} \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma,$$

este o schimbare de parametru pentru curba $C = \operatorname{Im} c$ *având proprietatea că*

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

unde
$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))).$$

Demonstraţie. Din definiţia integralei definite deducem că funcţia

$$s(t) = \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma$$

este derivabilă şi, mai mult, avem

$$\frac{ds}{dt} = ||\dot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall\ t \in [a, b].$$

Atunci, conform teoremei funcţiei inverse din analiza matematică, rezultă că funcţia

$$s = s(t)$$

este inversabilă iar inversa ei
$$t = t(s)$$

verifică relaţia
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} \neq 0,\ \forall\ s \in [0, L].$$

În concluzie, funcţia $s = s(t)$ este o schimbare de parametru, adică aplicaţia

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

este o reparametrizare a curbei $C = \operatorname{Im} c$. Prin urmare, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Folosind acum regula de derivare a funcţiilor compuse, deducem că

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} \Rightarrow ||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = ||\dot{c}(t(s))|| \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} = 1,\ \forall\ s \in [0, L]$$

■

Definiţia 4.5.6 *Parametrul s din teorema precedentă se numeşte* ***parametrul canonic*** *sau* ***parametrul lungime de arc*** *al curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ dată de*

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^2,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

se numeşte ***parametrizarea canonică*** *a curbei plane $C = \operatorname{Im} c$.*

Observaţia 4.5.7 *Parametrizarea canonică a curbei $C = \operatorname{Im} c$ păstrează orientarea curbei C deoarece*

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} > 0,\ \forall\ s \in [0, L].$$

Observaţia 4.5.8 *Proprietatea fundamentală a unei curbe plane $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$, parametrizată canonic prin*

$$\widetilde{c}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s)),\ \forall\ s \in [0, L],$$

este că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, L].$$

Din acest motiv, curbele plane parametrizate canonic se mai numesc şi ***curbe de viteză unu****.*

Observaţia 4.5.9 *Teorema precedentă ne arată că teoretic orice curbă plană parametrizată regulată poate fi reparametrizată canonic. Practic însă găsirea parametrului canonic s este adesea foarte dificilă, chiar imposibilă, deoarece integrala care defineşte parametrul canonic conduce la funcţii $s(t)$ extrem de complicate, care nu pot fi uşor inversate.*

Exemplul 4.5.10 *Să se reparametrizeze prin lungimea de arc cercul $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = (r\cos t, r\sin t),\ r > 0.$$

Prin derivare, obţinem

$$\dot{c}(t) = (-r\sin t, r\cos t),\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}(t)|| = r,\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Atunci, parametrul lungime de arc este

$$s(t) = \int_0^t r d\sigma = rt, \ \forall \ t \in [0, 2\pi].$$

iar inversul parametrului canonic este

$$t(s) = \frac{s}{r}, \ \forall \ s \in [0, 2\pi r].$$

În concluzie, reparametrizarea canonică a cercului $C = \operatorname{Im} c$ este dată de

$$\widetilde{c} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r} \right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C$$

şi

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1, \ \forall \ s \in [0, 2\pi r].$$

4.6 Interpretări geometrice pentru curbura unei curbe plane

Deoarece orice curbă plană parametrizată regulată poate fi reparametrizată prin lungimea de arc, să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^2, \ c(s) = (x(s), y(s)),$$

este o curbă plană parametrizată canonic. Atunci, rezultă că avem

$$v(s) = ||\dot{c}(s)|| = 1 \Leftrightarrow (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În acest context, ţinând seama de formulele de invarianţă demonstrate anterior şi alegând o orientare convenabilă a curbei plane $C = \operatorname{Im} c$, expresiile elementelor reperului lui Frénet, expresia curburii, precum şi formulele lui Frénet, se simplifică după cum urmează:

$$T(s) = \dot{c}(s) = (x'(s), y'(s)), \ N(s) = \mathcal{R}(\dot{c}(s)) = (-y'(s), x'(s)),$$

$$k(s) = \langle \ddot{c}(s), \mathcal{R}(\dot{c}(s)) \rangle = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = k(s) \cdot N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -k(s) \cdot T(s). \end{cases}$$

Teorema 4.6.1 *Curbura unei curbe plane parametrizate canonic are expresia*

$$k(s) = \varphi'(s), \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde $\varphi(s)$ reprezintă unghiul format de tangenta la curba C în punctul $c(s)$ cu axa Ox.

Demonstraţie. Din relaţia

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

rezultă că există o funcţie bijectivă

$$\varphi : [0, L] \to [0, 2\pi]$$

astfel încât pentru orice $s \in [0, L]$ avem

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\varphi(s) \\ y'(s) = \sin\varphi(s), \end{cases}$$

unde $\varphi(s)$ reprezintă unghiul format de vectorul tangent $\dot{c}(s) = x'(s)\overline{i} + y'(s)\overline{j}$ cu vectorul liber $\overline{i}$.

Din aceste relaţii rezultă imediat expreia căutată a curburii, şi anume

$$k(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \varphi'(s),\ \forall\ s \in [0, L].$$

■

Corolarul 4.6.2 *Orice dreaptă din plan are curbura egală cu zero în fiecare punct al ei. Reciproc, dacă o curbă plană are curbura în fiecare punct ale ei*

$$k(s) = 0,$$

atunci curba plană are imaginea inclusă într-o dreaptă.

Demonstraţie. Să presupunem că avem o dreaptă arbitrară din plan, de ecuaţie

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

unde $l^2 + m^2 \neq 0$. Atunci, o parametrizare regulată a dreptei D este dată de

$$x(t) = x_0 + lt \text{ şi } y(t) = y_0 + mt,$$

unde $t \in \mathbb{R}$. Rezultă imediat de aici că

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} = 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, să presupunem că C este o curbă plană cu proprietatea că

$$k(s) = \varphi'(s) = 0,\ \forall\ s \in [0, L],$$

unde s este parametrul canonic al curbei plane C. Atunci, deducem imediat că

$$\varphi(s) = \varphi_0 \in \mathbb{R},\ \forall\ s \in [0, L],$$

adică avem

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\varphi_0 \\ y'(s) = \sin\varphi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + s\cos\varphi_0 \\ y(s) = y_0 + s\sin\varphi_0 \end{cases}$$

pentru orice $s \in [0, L]$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Evident, imaginea parametrizării regulate

$$c(s) = (x_0 + s\cos\varphi_0, y_0 + s\sin\varphi_0),\ \ s \in [0, L],$$

este inclusă în dreapta

$$D : \frac{x - x_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - y_0}{\sin\varphi_0}.$$

■

Corolarul 4.6.3 *Orice cerc din plan orientat în sens trigonometric şi având raza $r > 0$ are curbura constantă*

$$k = \frac{1}{r}$$

în fiecare punct al său. Reciproc, dacă o curbă plană are curbura în fiecare punct al ei

$$k(s) = k > 0,$$

unde k este o constantă, atunci curba plană are imaginea inclusă într-un cerc de rază

$$r = \frac{1}{k}.$$

Demonstraţie. Să presupunem că avem un cerc arbitrar din plan, de ecuaţie

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Atunci, o parametrizare regulată în sens trigonometric a cercului C este dată de

$$x(t) = x_0 + r\cos t \text{ şi } y(t) = y_0 + r\sin t,$$

unde $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă imediat de aici că

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} = \frac{1}{r}, \ \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Reciproc, să presupunem că C este o curbă plană cu proprietatea că

$$k(s) = \varphi'(s) = k > 0, \ \forall\, s \in [0, L],$$

unde s este parametrul canonic al curbei plane C. Atunci, deducem imediat că

$$\varphi(s) = ks + \varphi_0, \ \forall\, s \in [0, L],$$

unde $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, adică avem

$$\begin{cases} x'(s) = \cos(ks + \varphi_0) \\ y'(s) = \sin(ks + \varphi_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + \dfrac{1}{k}\sin(ks + \varphi_0) \\ y(s) = y_0 - \dfrac{1}{k}\cos(ks + \varphi_0) \end{cases}$$

pentru orice $s \in [0, L]$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Evident, imaginea parametrizării regulate

$$c(s) = \left(x_0 + \frac{1}{k}\sin(ks + \varphi_0), y_0 - \frac{1}{k}\cos(ks + \varphi_0)\right), \ s \in [0, L],$$

este inclusă în cercul

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

■

4.7 Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţiile implicite ale următoarelor curbe plane parametrizate:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (2\cos 4t, 3\sin 4t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   Rezolvare. (a) Deoarece $x(t) = 2\cos t$ şi $y(t) = 3\sin t$, rezultă că avem

   $$C_1 : \frac{(x(t))^2}{4} + \frac{(y(t))^2}{9} = 1.$$

   Cu alte cuvinte, curba C_1 reprezintă elipsa descrisă de ecuaţia carteziană

   $$C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

   (b) Avem $x(t) = 2\cos 4t$ şi $y(t) = 3\sin 4t$, $t \in [0, 2\pi]$. Prin analogie cu punctul anterior, rezultă că curba C_2 reprezintă, de asemenea, elipsa

   $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

   Trebuie remarcat însă faptul că "diferenţa" dintre cele două elipse de la punctele (a) şi (b) constă în faptul că, în primul caz elipsa este "înfăşurată" o singură dată, în timp ce în cel de-al doilea caz elipsa este "înfăşurată" de patru ori. Cu alte cuvinte, din punct de vedere parametric, deşi reprezintă aceeaşi imagine, avem de-a face cu două "elipse distincte".

   (c) Din $x(t) = \cosh t$ şi $y(t) = \sinh t$ deducem că

   $$(x(t))^2 - (y(t))^2 = 1, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

   În concluzie, curba C_3 este hiperbola echilateră $C_3 : x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$. ■

2. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următoarelor curbe plane definite implicit:

   (a) $C_1 : y = \ln x + 1$, $x > 0$;

   (b) $C_2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

   (c) $C_3 : x^3 + 3x^2 y - y^3 + 9 = 0$.

   Rezolvare. (a) Luând $x = t$, $t > 0$, deducem că $y = \ln t + 1$. În concluzie, avem $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, unde $c_1(t) = (t, \ln t + 1)$.

   (b) Luând $x = 2\cos t$ şi $y = 5\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, obţinem parametrizarea elipsei C_2. Cu alte cuvinte, avem curba plană parametrizată $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde $c_2(t) = (2\cos t, 5\sin t)$.

(c) Căutăm un parametru $t \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $y = tx$. În aceste condiţii, obţinem relaţia $(1 + 3t - t^3)x^3 + 9 = 0$, adică

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}, \quad y = t\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}.$$

Prin urmare, găsim $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, unde

$$c_3(t) = \left(\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}, t\sqrt[3]{\frac{9}{t^3 - 3t - 1}}\right),$$

unde $t^3 - 3t - 1 \neq 0$. ■

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele C_1 şi C_2 în punctele lor de intersecţie cu axa Ox:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(\dfrac{3}{t^2 - 2t}, \dfrac{t^2 - 3}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$;

   (b) $C_2 : x^2 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$.

   Rezolvare. (a) Punctele de intersecţie cu axa Ox se obţin când $y(t) = 0$. Deducem că avem două puncte de intersecţie: $P(t = -\sqrt{3})$ şi $Q(t = \sqrt{3})$. Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = \left(-\frac{6(t - 1)}{(t^2 - 2t)^2}, 1 + \frac{3}{t^2}\right).$$

Rezultă $\dot{c}_1(-\sqrt{3}) = (2(3\sqrt{3}-5), 2)$ şi $\dot{c}_1(\sqrt{3}) = (-2(3\sqrt{3}+5), 2)$. Rezultă că ecuaţiile tangentelor şi normalelor în punctele P şi Q sunt:

$$T_P C_1 : \frac{x - \dfrac{3}{3 + 2\sqrt{3}}}{3\sqrt{3} - 5} = \frac{y}{1}, \quad N_P C_1 : \left(x - \frac{3}{3 + 2\sqrt{3}}\right)(3\sqrt{3} - 5) + y = 0,$$

$$T_Q C_1 : \frac{x - \dfrac{3}{3 - 2\sqrt{3}}}{-3\sqrt{3} - 5} = \frac{y}{1}, \quad N_Q C_1 : \left(x - \frac{3}{3 - 2\sqrt{3}}\right)(3\sqrt{3} + 5) - y = 0.$$

(b) Punctele de intersecţie cu axa Ox se obţin pentru $y = 0$. Cu alte cuvinte, avem ecuaţia $x^2 + 2x - 3 = 0$ şi rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Obţinem punctele de intersecţie $P(1, 0)$ şi $Q(-3, 0)$.

Gradientul funcţiei $f(x, y) = x^2 - xy^2 + 2x + y - 3$ este dat de

$$grad(f)(x, y) = (2x - y^2 + 2, -2xy + 1).$$

În particular, obţinem $grad(f)(P) = (4, 1)$ şi $grad(f)(Q) = (-4, 1)$. Prin urmare, ecuaţiile tangentelor şi normalelor în punctele P şi Q sunt:

$$T_P C_2 : 4x + y - 4 = 0, \qquad N_P C_2 : \frac{x - 1}{4} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow x - 4y - 1 = 0,$$

$$T_Q C_2 : -4x + y - 12 = 0, \quad N_Q C_2 : \frac{x + 3}{-4} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow x + 4y + 3 = 0.$$

■

4. Să se determine ecuaţiile tangentelor şi normalelor la conica

$$\Gamma : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0,$$

în punctele ei de intersecţie cu axele de coordonate.

Rezolvare. Punctele de intersecţie ale conicei Γ cu axa Ox se obţin când $y = 0$, adică rezolvând ecuaţia $16x - 36 = 0$. Rezultă că există un singur punct de intersecţie cu axa Ox, şi anume $P(9/4, 0)$. Pentru a afla punctele de intersecţie ale conicei Γ cu axa Oy, facem $x = 0$ şi obţinem ecuaţia $y^2 + 4y - 12 = 0$, ale cărei soluţii sunt $y_1 = 2$ şi $y_2 = -6$. Cu alte cuvinte, avem punctele de intersecţie $Q(0, 2)$ şi $R(0, -6)$. Deoarece $f_x(x, y) = 4y + 16$ şi $f_y(x, y) = 4x + 6y + 12$, rezultă că avem ecuaţiile tangentelor

$$T_P\Gamma : 16x + 21y - 36 = 0, \qquad T_Q\Gamma : x + y - 2 = 0, \qquad T_R\Gamma : x + 3y + 18 = 0.$$

Ecuaţiile dreptelor normale sunt:

$$N_P\Gamma : 84x - 64y - 189 = 0, \qquad N_Q\Gamma : x - y + 2 = 0, \qquad N_R\Gamma : 3x - y - 6 = 0.$$

■

5. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe plane:

(a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_1(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t);$$

(b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_2(t) = (a\,(t - \sin t)\,, a\cos t), \quad a > 0.$$

Rezolvare. (a) Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$$

iar norma vectorului viteză este $||\dot{c}_1(t)|| = 4\sin(t/2)$. În concluzie, avem

$$L(C_1) = \int_0^{2\pi} 4\sin\frac{t}{2}dt = -8\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 16.$$

(b) Vectorul viteză al curbei C_2 este

$$\dot{c}_2(t) = (a\,(1 - \cos t)\,, -a\sin t)$$

iar norma vectorului viteză este $||\dot{c}_2(t)|| = 2a\sin(t/2)$. În concluzie, avem

$$L(C_2) = \int_0^{\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a.$$

■

6. Să se arate că următoarea curbă nu este parametrizată canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:

$$C = \operatorname{Im} c, \quad c(t) = (e^{-t}(\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t + \sin t)), \quad t \in [0, a], \quad a > 0.$$

Rezolvare. Vectorul viteză al curbei C este $\dot{c}(t) = -2e^{-t}(\cos t, \sin t)$. Rezultă că $||\dot{c}(t)|| = 2e^{-t}$, adică avem

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_2(\sigma)||d\sigma = \int_0^t 2e^{-\sigma} d\sigma = -2e^{-t} + 2.$$

Inversând, găsim $t = \ln\left[2/\left(2-s\right)\right]$, $s < 2$. Prin urmare, vom obţine parametrizarea canonică prin lungimea de arc:

$$C = \operatorname{Im} \widetilde{c}, \quad \widetilde{c} : [0, 2 - 2e^{-a}] \to \mathbb{R}^2,$$

unde

$$\widetilde{c}(s) = \frac{2-s}{2}\left(\cos \ln \frac{2}{2-s} - \sin \ln \frac{2}{2-s}, \cos \ln \frac{2}{2-s} + \sin \ln \frac{2}{2-s}\right).$$

■

7. Să se determine curburile următoarelor curbe plane:

(a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ în punctul $P(t = 1)$;

(b) $C_2 : \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$ în punctul $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$;

(c) $C_3 : y = x^3 - 4x^2 - x^4$ în punctul $P(0, 0)$.

Rezolvare. (a) Avem $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 3t - t^3$ şi, prin derivare, deducem că $x'(t) = 6t$, $x''(t) = 6$ şi $y'(t) = 3 - 3t^2$, $y''(t) = -6t$. Aplicând formula curburii de la curbele plane parametrizate arbitrar, găsim

$$k(t) = \frac{-2}{3(t^2 + 1)^2}.$$

Prin urmare, avem $k(P) = k(t = 1) = -1/6$.

(b) Curba C_2 este o *astroidă* ce poate fi parametrizată prin

$$x(t) = 2\cos^3 t, \quad y(t) = 3\sin^3 t,$$

unde $t \in [0, 2\pi]\backslash\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. Punctul $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ este un punct regulat corespunzător valorii $t = \pi/4$. Cu ajutorul derivării funcţiilor $x(t)$ şi $y(t)$, precum şi al formulei curburii $k(t)$, vom găsi

$$k(P) = k\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-8\sqrt{2}}{13\sqrt{13}}.$$

(c) Parametrizăm curba C_3, luând $x(t) = t$ şi $y(t) = t^3 - 4t^2 - t^4$, $t \in \mathbb{R}$. În urma calculelor, găsim $k(P) = k(t = 0) = -8$. ■

8. Să se determine curba plană a cărei curbură este

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

unde $s \in \mathbb{R}$ este parametrul canonic.

Rezolvare. Căutăm o curbă $c(s) = (x(s), y(s))$ parametrizată canonic, adică o curbă cu proprietatea $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$. Rezultă că există o unică funcţie $\varphi(s) \in [0, 2\pi]$ astfel încât $x'(s) = \cos\varphi(s)$ şi $y'(s) = \sin\varphi(s)$. În acest context, avem

$$k(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

adică $\varphi(s) = \arctan s \in [-\pi/2, \pi/2]$, abstracţie făcând de o constantă. Prin urmare, obţinem

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \text{ şi } y'(s) = \pm\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Prin integrare, găsim două curbe:

$$x(s) = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \text{ şi } y(s) = \pm\sqrt{s^2+1},$$

abstracţie făcând de nişte constante. În final, calculând curburile celor două curbe anterioare, deducem că (abstracţie făcând de o roto-translaţie în plan) curba căutată este doar curba

$$x(s) = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \text{ şi } y(s) = \sqrt{s^2+1}.$$

■

4.8 Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţiile implicite ale următoarelor curbe plane parametrizate:

   (a) – *lănţişorul de egală rezistenţă*: $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t, \ln\cos t)$, unde $\cos t > 0$;

   (b) – *astroida*: $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (a\cos^3 t, b\sin^3 t)$, $t \in (0, 2\pi)\backslash\{\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2\}$ şi $a, b > 0$.

   R. (a) $C_1 : y = \ln\cos x$, $x \in \left(\dfrac{(4k-1)\pi}{2}, \dfrac{(4k+1)\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

   (b) $C_2 : \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{b^2}} = 1$, $x \in (-a, a)\backslash\{0\}$ şi $y \in (-b, b)\backslash\{0\}$.

2. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale următoarelor curbe plane definite implicit:

   (a) $C_1 : y^2 = e^x + 1$;

   (b) – *cisoida lui Diocles*: $C_2 : (x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$, unde $a > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

R. (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1 : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$c_1(t) = \left(\ln\left(t^2 - 1\right), t\right);$$

(b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2(t) = \left(\frac{2at^2}{t^2+1}, \frac{2at^3}{t^2+1}\right).$$

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele C_1 şi C_2 în punctele lor de intersecţie cu axele Ox şi Oy:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(\frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a, b > 0$;

   (b) $C_2 : (y-1)^3 + 27(x-2)^2 = 0$, unde $(x, y) \neq (2, 1)$.

   R. (a) $P(a, 0)$, $T_P C_1 : x - a = 0$, $N_P C_1 : y = 0$;

   $Q(-a, 0)$, $T_Q C_1 : x + a = 0$, $N_Q C_1 : y = 0$.

   (b) $P(0, 1 - 3\sqrt[3]{4})$, $T_P C_2 : \sqrt[3]{4}x - y + 1 - 3\sqrt[3]{4} = 0$,
   $N_P C_2 : \sqrt[3]{2}x + 2y - 2 + 6\sqrt[3]{4} = 0$;

   $Q\left(\frac{18+\sqrt{3}}{9}, 0\right)$, $T_Q C_2 : 6\sqrt{3}x + 3y - 12\sqrt{3} - 2 = 0$,

   $N_Q C_2 : 9x - 18\sqrt{3}y - \sqrt{3} - 18 = 0$;

   $R\left(\frac{18-\sqrt{3}}{9}, 0\right)$, $T_R C_2 : 6\sqrt{3}x - 3y - 12\sqrt{3} + 2 = 0$,

   $N_R C_2 : 9x + 18\sqrt{3}y + \sqrt{3} - 18 = 0$.

4. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica

$$\Gamma : x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0,$$

   în punctele ei de intersecţie cu axele de coordonate.

   R. Intersecţiile cu axele sunt $P(0, 3)$, $Q(0, -1)$, $R(3, 0)$ şi $S(2, 0)$. Tangentele corespunzătoare sunt: $T_P\Gamma : 5x + 8y - 24 = 0$, $T_Q\Gamma : 5x - 8y - 8 = 0$, $T_R\Gamma : x + 4y - 3 = 0$ şi $T_S\Gamma : x - 4y - 2 = 0$.

5. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe plane:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_1(t) = \left(4a\cos^3\frac{t}{2}, 4a\sin^3\frac{t}{2}\right), \quad a > 0;$$

   (b) – *lemniscata lui Bernoulli*: $C_2 : (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$, unde $a > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

R. (a) $L(C_1) = 12a$.

(b) Căutând o parametrizare de forma $y = tx$, găsim că lemniscata lui Bernoulli poate fi parametrizată ca $C_2 = \operatorname{Im} c_2^1 \cup \operatorname{Im} c_2^2$, unde $c_2^{1,2} : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$,

$$c_2^{1,2}(t) = \left(\pm a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, \pm a\sqrt{2} \cdot \frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2} \right).$$

Deoarece curbele $C_2^1 = \operatorname{Im} c_2^1$ şi $C_2^2 = \operatorname{Im} c_2^2$ sunt simetrice faţă de origine, rezultă că avem

$$\begin{aligned} L(C_2) &= 2L(C_2^1) = 4a\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \\ &= 4a\sqrt{2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{4n+1} \right). \end{aligned}$$

6. Să se arate că următoarele curbe nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [\pi, \infty) \to \mathbb{R}^2$, unde

$$c_2(t) = \left(\int_\pi^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau, \int_\pi^t \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \right).$$

R. (a) $t = 2 \arccos \dfrac{8-s}{8}$, $s \in [0, 16]$. (b) $t = \pi e^s$, $s \in [0, \infty)$.

7. Să se determine curburile următoarelor curbe plane:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1, c_1(t) = \left(\dfrac{\cosh t}{t}, \dfrac{\sinh t}{t} \right)$, $t \neq 0$, într-un punct curent al curbei;

   (b) – *clopotul lui Gauss*: $C_2 : y = e^{-x^2}$ în punctul $P(0,1)$;

   (c) $C_3 : x^3 - 8y^3 + 8xy = 0$, unde $(x,y) \neq (0,0)$, în punctul $P(2,-1)$.

R. (a) $k_1(t) = \dfrac{-2t^4\sqrt{2}}{[(t-1)^2 e^{2t} + (t+1)^2 e^{-2t}]^{3/2}}$.

(b) $k_2(P) = -2$. (c) $k_3(P) = 32/\left(5\sqrt{5}\right)$.

8. Să se determine curba plană a cărei curbură este

$$k(s) = \sqrt{\frac{1}{e^{-2s} - 1}},$$

unde $s < 0$ este parametrul canonic.

R. Abstracţie făcând de o roto-translaţie în plan, avem curba plană $x(s) = -e^s$ şi

$$y(s) = \sqrt{1 - e^{2s}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2s}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2s}}}.$$

5. CURBE ÎN SPAȚIU

În acest capitol vom defini riguros *curbele în spaţiu* şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă nişte mărimi scalare (*curbură* şi *torsiune*) care ne vor da informaţii asupra formei unei curbe în spaţiu. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

5.1 Definiții și exemple

Definiţia 5.1.1 *O aplicaţie diferenţiabilă $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, unde I este un interval real, definită prin*

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \forall\ t \in I,$$

unde

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0,\ \forall\ t \in I,$$

*se numeşte **parametrizare regulată**.*

Definiţia 5.1.2 *Variabila $t \in I$, care defineşte parametrizarea regulată $c(t)$, se numeşte **parametru**.*

Definiţia 5.1.3 *Mulţimea de puncte din spaţiu*

$$\operatorname{Im} c \overset{not}{=} \{P(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\} \subset E_3,$$

*care reprezintă imaginea unei parametrizări regulate $c(t)$, se numeşte **curbă parametrizată regulată în spaţiu**. Dacă un punct $P(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ are proprietatea*

$$(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2 = 0,$$

*atunci punctul P se numeşte **punct singular** al curbei parametrizate $\operatorname{Im} c$.*

Definiţia 5.1.4 *O mulţime nevidă C de puncte din spaţiu cu proprietatea că pentru fiecare punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ există în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate V a punctului M_0 şi există o parametrizare regulată*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

astfel încât

$$C \cap V = \operatorname{Im} c$$

*se numeşte **curbă în spaţiu**.*

Observaţia 5.1.5 *Intuitiv vorbind, o mulţime nevidă C de puncte din spaţiu este o curbă în spaţiu dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct $M_0 \in C$ curba în spaţiu poate fi identificată cu imaginea unei parametrizări regulate din spaţiu.*

Observaţia 5.1.6 *Este evident că orice curbă parametrizată în spaţiu este o curbă în spaţiu.*

Observaţia 5.1.7 *O curbă în spaţiu poate fi privită ca imaginea mai multor parametrizări regulate distincte.*

Exemplul 5.1.8 *Fie aplicaţia diferenţiabilă*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

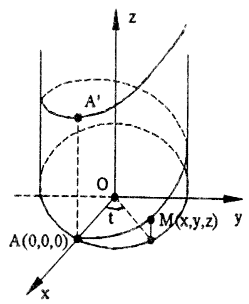
unde $a > 0$ şi $b \neq 0$. Deoarece funcţiile

$$x(t) = a\cos t,\ \ y(t) = a\sin t \text{ şi } z(t) = bt$$

verifică relaţia

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

*rezultă că aplicaţia diferenţiabilă c este o parametrizare regulată. Rezultă că imaginea parametrizării regulate c este o curbă în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ a cărei reprezentare grafică este dată în figura de mai jos (**elicea circulară**):*



Elicea circulară C

Exemplul 5.1.9 *Să considerăm mulţimea de puncte din spaţiu*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

O parametrizare regulată a mulţimii de puncte C este evident dată de

$$x = y = t \text{ şi } z = \frac{1}{t^2},$$

unde $t \neq 0$. Prin urmare, considerând parametrizarea regulată

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = \left(t, t, \frac{1}{t^2}\right),$$

obţinem că avem adevărată relaţia

$$C = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu.

Fie $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^3$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x, y, z) \in D$ vectorii

$$grad(f)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$$

şi

$$grad(g)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(P), \frac{\partial g}{\partial y}(P), \frac{\partial g}{\partial z}(P)\right),$$

unde $\partial f/\partial x \stackrel{not}{=} f_x$, $\partial f/\partial y \stackrel{not}{=} f_y$ şi $\partial f/\partial z \stackrel{not}{=} f_z$ (respectiv $\partial g/\partial x \stackrel{not}{=} g_x$, $\partial g/\partial y \stackrel{not}{=} g_y$ şi $\partial g/\partial z \stackrel{not}{=} g_z$) reprezintă derivatele parţiale ale funcţiei $f(x, y, z)$ (respectiv $g(x, y, z)$), se numesc *gradienţii* funcţiilor f şi g în punctul $P(x, y, z)$.

Definiţia 5.1.10 *Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care verifică relaţia*

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

se numeşte ***punct regulat*** *al funcţiilor f şi g. Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care nu este regulat se numeşte* ***punct singular*** *al funcţiilor f şi g.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 5.1.11 *Mulţimea de puncte din spaţiu $P(x, y, z) \in E_3$ ale căror coordonate verifică relaţiile*

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

unde

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P) \neq (0, 0, 0),\ \ \forall\ P \in C,$$

este o curbă în spaţiu.

Demonstraţie. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte C (i.e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)).$$

Deoarece condiţia

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix} = 2,$$

să presupunem că

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei

$$F = (f, g) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

şi punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$, deducem că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ şi există două funcţii derivabile

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ şi } \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \psi(x_0) = z_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}, \ \forall\, x \in I,$$

şi

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall\, x \in I.$$

Prin derivare, din ultimele relaţii găsim sistemul liniar

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) = 0 \end{cases}$$

care ne conduce la soluţiile

$$\varphi'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}, \ \forall\, x \in I,$$

şi

$$\psi'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}}, \ \forall\, x \in I.$$

Să considerăm acum aplicaţia diferenţiabilă

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$c(t) = (t, \varphi(t), \psi(t)).$$

Deoarece
$$1 + (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0, \ \forall\, t \in I,$$
deducem că aplicaţia diferenţiabilă $c(t)$ este o parametrizare regulată. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$, obţinem că
$$C \cap V = \operatorname{Im} c.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu. ■

Definiţia 5.1.12 *O curbă în spaţiu definită ca în teorema precedentă se numeşte **curbă în spaţiu definită implicit**.*

Exemplul 5.1.13 *Mulţimea de puncte din spaţiu*
$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$
*este o curbă în spaţiu numită **curba lui Ţiţeica**. Pentru a demonstra că mulţimea de puncte C este o curbă în spaţiu, să notăm că*
$$f(x, y, z) = xyz - 1 \text{ şi } g(x, y, z) = x - y^2.$$
Gradienţii acestor două funcţii sunt
$$grad(f)(P) = (yz, xz, xy) \text{ şi } grad(g)(P) = (1, -2y, 0), \ \forall\, P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
iar produsul lor vectorial este
$$\begin{aligned} [grad(f) \times grad(g)]\,(P) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ yz & xz & xy \\ 1 & -2y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2xy^2\bar{i} + xy\bar{j} - (2y^2 + x)z\bar{k} \neq \bar{0}, \ \forall\, P(x, y, z) \in C. \end{aligned}$$

Este important de subliniat că o parametrizare regulată a curbei lui Ţiţeica este
$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3,$$
unde
$$c(t) = \left(t^2, t, \frac{1}{t^3}\right).$$
Cu alte cuvinte, avem $C = \operatorname{Im} c$.

Observaţia 5.1.14 *Din cele descrise până acum deducem că o **curbă în spaţiu** poate fi descrisă în două feluri:*

*(1) **parametric** (ca imaginea unei parametrizări regulate $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$);*

*(2) **implicit** (ca o mulţime de puncte regulate $C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$).*

Observaţia 5.1.15 *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice curbă în spaţiu definită implicit poate fi parametrizată local, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală regulată este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări regulate locale pentru curbele în spaţiu definite implicit (vezi exemplul anterior).*

5.2 Dreaptă tangentă și plan normal

5.2.1 Curbe parametrizate

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

este o curbă plană parametrizată regulată şi să considerăm că

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)),$$

unde $t_0 \in I$, este un punct arbitrar fixat al curbei C. Interpretarea geometrică a derivatei aplicaţiei c în punctul t_0 implică faptul că că vectorul liber

$$\dot{c}(t_0) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{c(t_0 + h) - c(t_0)}{h},$$

este tangent la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

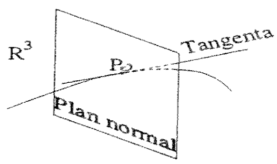
Definiţia 5.2.2 *Vectorul liber nenul*

$$\dot{c}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

se numeşte ***vectorul tangent (viteză)*** *la curba C în punctul $P_0 = c(t_0)$.*

Definiţia 5.2.3 *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 5.2.4 *Planul $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0 = c(t_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul tangent $\dot{c}(t_0)$ se numeşte* ***planul normal*** *la curba C în punctul P_0.*



Tangenta şi planul normal la o curbă în spaţiu

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 5.2.5 *Ecuaţiile dreptei tangente $T_{P_0}C$ şi a planului normal $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

şi

$$N_{P_0}C : (x - x(t_0)) \cdot x'(t_0) + (y - y(t_0)) \cdot y'(t_0) + (z - z(t_0)) \cdot z'(t_0) = 0.$$

Exemplul 5.2.6 *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul*

$$P_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$$

la elicea circulară $\mathcal{E} = \operatorname{Im} c$, *unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (\cos t, \sin t, t)\,.$$

Este evident că avem

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t \textit{ şi } z(t) = t.$$

Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t \textit{ şi } z'(t) = 1.$$

Calculând toate entităţile anterioare pentru

$$t_0 = \frac{\pi}{4},$$

găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\mathcal{E} : \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{1}$$

şi

$$N_{P_0}\mathcal{E} : -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + z - \frac{\pi}{4} = 0.$$

5.2.2 Curbe definite implicit

Să considerăm că

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

unde

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P) \neq (0, 0, 0),\ \forall\ P \in C,$$

este o curbă în spaţiu definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar fixat al curbei C (i.e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $g(x_0, y_0, z_0) = 0$). Fie

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

o parametrizare regulată a curbei C în vecinătatea punctului $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Atunci există $t_0 \in I$ astfel încât

$$c(t_0) = P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = P_0(x_0, y_0, z_0)$$

şi

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \text{ şi } g(x(t), y(t), z(t)) = 0,\ \forall\ t \in I.$$

Derivând ultimele egalităţi în raport cu t şi calculând totul în punctul t_0, deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot(x'(t_0))+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot(y'(t_0))+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot(z'(t_0))=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle grad(f)(P_0),\dot{c}(t_0)\rangle=0$$

şi

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)\cdot(x'(t_0))+\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)\cdot(y'(t_0))+\frac{\partial g}{\partial z}(P_0)\cdot(z'(t_0))=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle grad(g)(P_0),\dot{c}(t_0)\rangle=0,$$

adică vectorul nenul

$$[grad(f)\times grad(g)]\,(P_0)$$

este coliniar cu vectorul $\dot{c}(t_0)$ care este tangent la curba C în $P_0(x_0,y_0,z_0)$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

Definiţia 5.2.3 *Vectorul liber nenul*

$$[grad(f)\times grad(g)]\,(P_0)=T_1(P_0)\overline{i}+T_2(P_0)\overline{j}+T_3(P_0)\overline{k},$$

unde

$$T_1(P_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(P_0)\end{vmatrix},\quad T_2(P_0)=-\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(P_0)\end{vmatrix}$$

şi

$$T_3(P_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(P_0)\end{vmatrix},$$

se numeşte ***vectorul tangent*** *la curba C în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$.*

Definiţia 5.2.4 *Dreapta $T_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ şi care este direcţionată de vectorul tangent*

$$[grad(f)\times grad(g)]\,(P_0)$$

se numeşte ***dreapta tangentă*** *la curba C în punctul P_0.*

Definiţia 5.2.5 *Planul $N_{P_0}C$ care trece prin punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul tangent*

$$[grad(f)\times grad(g)]\,(P_0)$$

se numeşte ***planul normal*** *la curba C în punctul P_0.*

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 5.2.6 *Ecuaţiile dreptei tangente $T_{P_0}C$ şi a planului normal $N_{P_0}C$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}C:\frac{x-x_0}{T_1(P_0)}=\frac{y-y_0}{T_2(P_0)}=\frac{z-z_0}{T_3(P_0)}$$

şi

$$N_{P_0}C:(x-x_0)\cdot T_1(P_0)+(y-y_0)\cdot T_2(P_0)+(z-z_0)\cdot T_3(P_0)=0.$$

Exemplul 5.2.7 *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul* $P_0\,(1,1,1)$ *la curba în spaţiu*

$$C:\begin{cases} xyz = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

Avem evident

$$f(x,y,z) = xyz - 1 \text{ şi } g(x,y,z) = x - y.$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$grad(f)(P) = (yz, xz, xy) \text{ şi } grad(g)(P) = (1,-1,0),\ \forall\ P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculând aceşti gradienţi în punctul P_0, *obţinem*

$$grad(f)(P_0) = (1,1,1) \text{ şi } grad(g)(P_0) = (1,-1,0),$$

care implică vectorul tangent

$$[grad(f) \times grad(g)]\,(P_0) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$$

În concluzie, ecuaţiile cerute sunt

$$T_{P_0}C : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

şi

$$N_{P_0}C : (x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 1 + (z-1)\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow N_{P_0}C : x + y - 2z = 0,$$

unde am folosit egalităţile

$$T_1(P_0) = 1,\ T_2(P_0) = 1 \text{ şi } T_3(P_0) = -2.$$

5.3 Triedrul lui Frénet. Curbura și torsiunea unei curbe în spațiu

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

este o curbă parametrizată regulată în spaţiu.

Definiţia 5.3.1 *Vectorul liber nenul*

$$T(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t),$$

unde

$$\dot{c}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

se numeşte ***versorul tangent*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Să considerăm vectorul liber (*acceleraţie*)

$$\ddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x''(t), y''(t), z''(t))$$

şi să presupunem că avem adevărată relaţia

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall \ t \in I.$$

În acest context, putem introduce următoarele concepte geometrice:

Definiţia 5.3.2 *Vectorul liber nenul*

$$B(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot [\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)]$$

se numeşte ***versorul binormal*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Definiţia 5.3.3 *Vectorul liber nenul*

$$N(t) \stackrel{def}{=} B(t) \times T(t)$$

se numeşte ***versorul normal*** *la curba* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

Observaţia 5.3.4 *Folosind proprietăţile dublului produs vectorial în spaţiul* $\mathbb{R}^3$*, se verifică uşor că avem*

$$N(t) = -\frac{\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle}{||\dot{c}(t)|| \cdot ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) + \frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t).$$

Observaţia 5.3.5 *Folosind proprietăţile produsului scalar şi ale produsului vectorial în spaţiul* $\mathbb{R}^3$*, se verifică uşor că avem*

$$||T(t)||^2 = ||N(t)||^2 = ||B(t)||^2 = 1, \ \forall \ t \in I,$$

şi

$$\langle T(t), N(t) \rangle = \langle T(t), B(t) \rangle = \langle N(t), B(t) \rangle = 0, \ \forall \ t \in I,$$

adică reperele

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t); \ T(t), N(t), B(t)\}, \ \forall \ t \in I,$$

sunt repere ortonormate în spaţiul geometriei euclidiene E_3.

Definiţia 5.3.6 *Reperul ortonormat mobil*

$$\mathcal{R}_t = \{P = c(t); \ T(t), N(t), B(t)\},$$

unde $t \in I$*, se numeşte* ***triedrul lui Frénet*** *asociat curbei* $C = \operatorname{Im} c$ *în punctul* $P = c(t)$.

1. *Planul determinat de punctul* $P = c(t)$ *şi versorii* $T(t)$ *şi* $N(t)$ *se numeşte* ***planul osculator****.*

2. *Planul determinat de punctul* $P = c(t)$ *şi versorii* $T(t)$ *şi* $B(t)$ *se numeşte* ***planul rectificant****.*

3. *Planul determinat de punctul $P = c(t)$ şi versorii $N(t)$ şi $B(t)$ se numeşte* ***planul normal****.*

4. *Dreapta determinată de punctul $P = c(t)$ şi versorul $T(t)$ se numeşte* ***tangentă****.*

5. *Dreapta determinată de punctul $P = c(t)$ şi versorul $N(t)$ se numeşte* ***normala principală****.*

6. *Dreapta determinată de punctul $P = c(t)$ şi versorul $B(t)$ se numeşte* ***binormală****.*

Definiţia 5.3.7 *Numărul real strict pozitiv*

$$k(t) \stackrel{def}{=} \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} > 0$$

se numeşte ***curbura*** *curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Definiţia 5.3.8 *Numărul real*

$$\tau(t) \stackrel{def}{=} \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} \in \mathbb{R},$$

unde

$$\dddot{c}(t) \stackrel{def}{=} (x'''(t), y'''(t), z'''(t)),$$

se numeşte ***torsiunea*** *curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Studiind acum variaţia versorilor triedrului lui Frénet, putem demonstra următorul rezultat geometric important:

Teorema 5.3.9 *Versorii $T(t)$, $N(t)$ şi $B(t)$ ai triedrului lui Frénet asociat curbei C în punctul $P = c(t)$ verifică următoarele* ***formule Frénet****:*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(t) \cdot v(t) \cdot N(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -k(t) \cdot v(t) \cdot T(t) + \tau(t) \cdot v(t) \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = -\tau(t) \cdot v(t) \cdot N(t), \end{cases}$$

unde $v(t) = ||\dot{c}(t)||$ reprezintă ***viteza*** *curbei $C = \operatorname{Im} c$ în punctul $P = c(t)$.*

Demonstraţie. Deoarece baza $B_t = \{T(t), N(t), B(t)\}$ este ortonormată, rezultă că următoarele descompuneri sunt adevărate:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t) \right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, B(t) \right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = \left\langle \dfrac{dB}{dt}, T(t) \right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t) \right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, B(t) \right\rangle \cdot B(t). \end{cases}$$

Derivând acum relaţiile

$$\langle T(t), T(t)\rangle = \langle N(t), N(t)\rangle = \langle B(t), B(t)\rangle = 1$$

şi

$$\langle T(t), N(t)\rangle = \langle T(t), B(t)\rangle = \langle N(t), B(t)\rangle = 0,$$

deducem că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, T(t)\right\rangle = \left\langle \frac{dN}{dt}, N(t)\right\rangle = \left\langle \frac{dB}{dt}, B(t)\right\rangle = 0$$

şi

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dN}{dt}, T(t)\right\rangle = 0 \\ \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, T(t)\right\rangle = 0 \\ \left\langle \dfrac{dN}{dt}, B(t)\right\rangle + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle = 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, avem adevărate descompunerile

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t) + \left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dN}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot T(t) - \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot B(t) \\ \dfrac{dB}{dt} = -\left\langle \dfrac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle \cdot T(t) + \left\langle \dfrac{dB}{dt}, N(t)\right\rangle \cdot N(t). \end{cases}$$

Deoarece, prin derivare directă, obţinem

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle}{||\dot{c}(t)||^3} \cdot \dot{c}(t) + \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t),$$

găsim, prin calcul, că

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, B(t)\right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle \frac{dT}{dt}, N(t)\right\rangle = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^2} = k(t) \cdot v(t).$$

În acelaşi timp, prin derivare directă şi folosind formulele

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{u}(t) \times \overline{v}(t)\right] = \frac{d\overline{u}}{dt} \times \overline{v}(t) + \overline{u}(t) \times \frac{d\overline{v}}{dt},\ \forall\ \overline{u}(t),\ \overline{v}(t) \in V_3,$$

şi

$$\left\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d}\right\rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c}\rangle & \left\langle \overline{a}, \overline{d}\right\rangle \\ \left\langle \overline{b}, \overline{c}\right\rangle & \left\langle \overline{b}, \overline{d}\right\rangle \end{vmatrix},\ \forall\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c},\ \overline{d} \in V_3,$$

deducem, prin calcul, că avem

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= -\frac{||\dot{c}(t)||^2 \cdot \langle \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)\rangle - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle \cdot \langle \dot{c}(t), \dddot{c}(t)\rangle}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^3} \cdot \left[\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\right] + \\ &\quad + \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \left[\dot{c}(t) \times \dddot{c}(t)\right]. \end{aligned}$$

Deoarece
$$N(t) = -\frac{\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle}{||\dot{c}(t)|| \cdot ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) + \frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot \ddot{c}(t)$$
rezultă imediat că
$$\left\langle \frac{dB}{dt}, N(t) \right\rangle = -\frac{||\dot{c}(t)||}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} \cdot (\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = -\tau(t) \cdot v(t).$$

■

Exemplul 5.3.10 *Să se calculeze elementele triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea într-un punct arbitrar al curbei în spaţiu* $C = \operatorname{Im} c$, *unde*
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2}\right).$$

Prin derivări succesive obţinem
$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, t),\ \ddot{c}(t) = (-\cos t, -\sin t, 1) \text{ şi } \dddot{c}(t) = (\sin t, -\cos t, 0).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ *şi* $\ddot{c}(t)$ *este*
$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin t & \cos t & t \\ -\cos t & -\sin t & 1 \end{vmatrix} \equiv (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 1)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ *şi* $\dddot{c}(t)$ *este*
$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & t \\ -\cos t & -\sin t & 1 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = t.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ *şi* $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ *sunt*
$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{t^2+1} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = \sqrt{t^2+2}.$$

Prin urmare, elementele triedrului lui Frénet sunt
$$T(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \cdot \dot{c}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot (-\sin t, \cos t, t),$$
$$B(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||} \cdot [\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)] = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \cdot (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 1),$$
$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \left(t \sin t - (t^2+1)\cos t, -t\cos t - (t^2+1)\sin t, 1\right) \end{aligned}$$

iar curbura şi torsiunea curbei $C = \operatorname{Im} c$ *au expresiile*
$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{\sqrt{t^2+2}}{(t^2+1) \cdot \sqrt{t^2+1}} \text{ şi } \tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{t}{t^2+2}.$$

5.4 Schimbări de parametru. Orientarea unei curbe în spațiu

Fie $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare regulată, definită prin

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

şi fie curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$.

Definiţia 5.4.1 *Orice funcţie*

$$\bar{t} : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R},\ t \to \bar{t}(t),$$

unde J este un interval real, care este derivabilă, bijectivă şi cu inversa

$$t : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R},\ \bar{t} \to t(\bar{t}),$$

derivabilă se numeşte ***schimbare de parametru*** *a curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar parametrizarea regulată*

$$\bar{c} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \bar{c}(\bar{t}) = c(t(\bar{t})),$$

se numeşte ***reparametrizare*** *a curbei $C = \operatorname{Im} c$.*

Observaţia 5.4.2 *Dacă $\bar{t} = \bar{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci următoarea egalitate este adevărată*

$$\frac{d\bar{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}} = 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{\dfrac{d\bar{t}}{dt}}.$$

Teorema 5.4.3 *Dacă curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ verifică relaţia*

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall\ t \in I,$$

şi dacă $\bar{t} = \bar{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci următoarele ***formule de invarianţă*** *sunt adevărate:*

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \bar{c} = \operatorname{Im} c = C,$$

$$\overline{T}(\bar{t}) = \pm T(t),\ \overline{N}(\bar{t}) = N(t),\ \overline{B}(\bar{t}) = \pm B(t),$$

$$\bar{k}(\bar{t}) = k(t),\ \bar{\tau}(\bar{t}) = \tau(t),\ \bar{v}(\bar{t}) = \pm v(t) \cdot \frac{dt}{d\bar{t}}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{T}}{d\bar{t}} = \bar{k}(\bar{t}) \cdot \bar{v}(\bar{t}) \cdot \overline{N}(\bar{t}) \\ \dfrac{d\overline{N}}{d\bar{t}} = -\bar{k}(\bar{t}) \cdot \bar{v}(\bar{t}) \cdot \overline{T}(\bar{t}) + \bar{\tau}(\bar{t}) \cdot \bar{v}(\bar{t}) \cdot \overline{B}(\bar{t}) \\ \dfrac{d\overline{B}}{d\bar{t}} = -\bar{\tau}(\bar{t}) \cdot \bar{v}(\bar{t}) \cdot \overline{N}(\bar{t}), \end{cases}$$

unde semnul " + " apare dacă $\dfrac{dt}{d\bar{t}} > 0$ iar semnul " − " apare dacă $\dfrac{dt}{d\bar{t}} < 0$.

Demonstraţie. Formulele de mai sus se deduc imediat din relaţiile de derivare a funcţiilor compuse, şi anume

$$\dot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}},$$

$$\ddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \ddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^2 + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2}.$$

şi

$$\dddot{\overline{c}}(\overline{t}) = \dddot{c}(t) \cdot \left(\frac{dt}{d\overline{t}}\right)^3 + 3\ddot{c}(t) \cdot \frac{dt}{d\overline{t}} \cdot \frac{d^2t}{d\overline{t}^2} + \dot{c}(t) \cdot \frac{d^3t}{d\overline{t}^3}.$$

■

Observaţia 5.4.4 *Egalităţile din teorema precedentă ne sugerează că curbele în spaţiu pot fi privite ca curbe* ***orientate (cu un sens de parcurs)****. Intuitiv vorbind, putem aprecia că orientarea unei curbe în spaţiu $c(t)$ este dată de orientarea geometrică a vectorului tangent $\dot{c}(t)$ ca vector liber legat în punctul $c(t)$. În acest context geometric, o schimbare de parametru $\overline{t} = \overline{t}(t)$ a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$* ***păstrează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} > 0$$

şi ***inversează orientarea*** *curbei C dacă*

$$\frac{dt}{d\overline{t}} < 0.$$

Exemplul 5.4.5 *Fie elicea circulară $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; c(t) = (2\cos t, 2\sin t, t).$$

Funcţia

$$\overline{t} : \mathbb{R} \to (-\infty, 0), \; \overline{t}(t) = -e^t,$$

este o schimbare de parametru a curbei $C = \operatorname{Im} c$, având inversa

$$t : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \; t(\overline{t}) = \ln(-\overline{t}).$$

În acest context, reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ este dată de

$$\overline{c} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}^3, \; \overline{c}(\overline{t}) = \big(2\cos(\ln(-\overline{t})), 2\sin(\ln(-\overline{t})), \ln(-\overline{t})\big).$$

Este important de subliniat că avem adevărată egalitatea

$$\overline{C} = \operatorname{Im} \overline{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Deoarece

$$\frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{1}{\overline{t}} < 0, \; \forall \; \overline{t} \in (-\infty, 0),$$

rezultă că schimbarea de parametru $\overline{t}(t) = -e^t$ inversează orientarea curbei C determinată de orientarea geometrică a vectorului tangent

$$\dot{c}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1).$$

Exemplul 5.4.6 *Să se calculeze curbura şi torsiunea într-un punct arbitrar al curbei lui Ţiţeica*

$$C : \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y^2. \end{cases}$$

Deoarece curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu nu depind de parametrizarea regulată aleasă, subliniem că o parametrizare regulată a curbei lui Ţiţeica este dată de

$$c : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$c(t) = \left(t^2, t, t^{-3}\right),$$

adică avem

$$C = \operatorname{Im} c.$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}(t) = (2t, 1, -3t^{-4}),\ \ddot{c}(t) = (2, 0, 12t^{-5}) \text{ şi } \dddot{c}(t) = (0, 0, -60t^{-6}).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ este

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & 1 & -3t^{-4} \\ 2 & 0 & 12t^{-5} \end{vmatrix} \equiv (12t^{-5}, -30t^{-4}, -2)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ este

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & -3t^{-4} \\ 2 & 0 & 12t^{-5} \\ 0 & 0 & -60t^{-6} \end{vmatrix} = 120t^{-6}.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ sunt

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{9t^{-8} + 1 + 4t^2} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = \sqrt{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}.$$

Prin urmare, curbura şi torsiunea curbei lui Ţiţeica $C = \operatorname{Im} c$ sunt

$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{\sqrt{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}}{(9t^{-8} + 1 + 4t^2) \cdot \sqrt{9t^{-8} + 1 + 4t^2}}$$

şi

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{120t^{-6}}{144t^{-10} + 900t^{-8} + 4}.$$

5.5 Lungimea unei curbe în spaţiu. Parametrizarea canonică

Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a < b,$$

este o curbă parametrizată regulată în spaţiu.

Definiţia 5.5.1 ***Lungimea*** *curbei $C = \operatorname{Im} c$ este definită prin formula*

$$L(C) = \int_a^b ||\dot{c}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt > 0.$$

Observaţia 5.5.2 *Definiţia de mai sus este consistentă din punct de vedere geometric deoarece dacă împărţim curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$ în arce de curbă suficient de mici, atunci putem aproxima lungimea acestor arce de curbă cu lungimea segmentelor de dreaptă pe care le subântind. Evident, lungimea curbei $C = \operatorname{Im} c$ se obţine adunând lungimile acestor segmente de dreaptă şi aplicând sumei un procedeu la limită ca la integrale care ne conduce la formula de mai sus.*

Observaţia 5.5.3 *Dacă $\overline{t} = \overline{t}(t)$ este o schimbare de parametru pentru curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci*

$$L(\overline{C}) = L(C),$$

adică lungimea unei curbe în spaţiu nu depinde nici de parametrizare nici de orientare.

Exemplul 5.5.4 *Să se calculeze lungimea curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde*

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = \left(t\cos t, t\sin t, \frac{t^2}{2}\right).$$

Vectorul tangent într-un punct arbitrar al curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\dot{c}(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, t)$$

iar norma acestui vector (viteza) este

$$v(t) = ||\dot{c}(t)|| = \sqrt{2t^2 + 1},\ \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

În concluzie, lungimea curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2t^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{t\sqrt{2t^2+1}}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + \frac{1}{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln 2 + \frac{2\pi\sqrt{4\pi^2+1}}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 5.5.5 *Dacă $L > 0$ este lungimea curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, atunci funcţia*

$$s : [a, b] \to [0, L],\ s(t) \stackrel{def}{=} \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma,$$

este o schimbare de parametru pentru curba $C = \operatorname{Im} c$ având proprietatea că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

unde

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))).$$

Demonstraţie. Din definiţia integralei definite deducem că funcţia

$$s(t) = \int_a^t ||\dot{c}(\sigma)||d\sigma$$

este derivabilă şi, mai mult, avem

$$\frac{ds}{dt} = ||\dot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall \ t \in [a, b].$$

Atunci, conform teoremei funcţiei inverse din analiza matematică, rezultă că funcţia

$$s = s(t)$$

este inversabilă iar inversa ei

$$t = t(s)$$

verifică relaţia

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} \neq 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În concluzie, funcţia $s = s(t)$ este o schimbare de parametru, adică aplicaţia

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))),$$

este o reparametrizare a curbei $C = \operatorname{Im} c$. Prin urmare, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C.$$

Folosind acum regula de derivare a funcţiilor compuse, deducem că

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} \Rightarrow ||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = ||\dot{c}(t(s))|| \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} = 1, \ \forall \ s \in [0, L]$$

■

Definiţia 5.5.6 *Parametrul s din teorema precedentă se numeşte* ***parametrul canonic*** *sau* ***parametrul lungime de arc*** *al curbei $C = \operatorname{Im} c$ iar reparametrizarea curbei $C = \operatorname{Im} c$ dată de*

$$\widetilde{c} : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ \widetilde{c}(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))),$$

se numeşte ***parametrizarea canonică*** *a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$.*

Observaţia 5.5.7 *Parametrizarea canonică a curbei $C = \operatorname{Im} c$ păstrează orientarea curbei C deoarece*

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\dot{c}(t(s))||} > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Observaţia 5.5.8 *Condiţia suplimentară*

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

care determină existenţa elementelor $B(t)$, $N(t)$ şi $\tau(t)$, este echivalentă cu condiţia

$$||\ddot{\widetilde{c}}(s)|| > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În consecinţă, condiţia

$$||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

este echivalentă cu condiţia

$$||\ddot{\widetilde{c}}(s)|| = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Această ultimă condiţie este echivalentă cu condiţia

$$\ddot{\widetilde{c}}(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

care implică

$$\widetilde{c}(s) = (ls + x_0, ms + y_0, ns + z_0), \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde $l, m, n, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, *adică curba* $C = \operatorname{Im} c$ *este un segment din dreapta*

$$D : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Observaţia 5.5.9 *Proprietatea fundamentală a unei curbe în spaţiu* $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$, *parametrizată canonic prin*

$$\widetilde{c}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s), \widetilde{z}(s)), \ \forall \ s \in [0, L],$$

este că

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Din acest motiv, curbele în spaţiu parametrizate canonic se mai numesc şi ***curbe de viteză unu****.*

Observaţia 5.5.10 *Teorema precedentă ne arată că teoretic orice curbă parametrizată regulată în spaţiu poate fi reparametrizată canonic. Practic însă găsirea parametrului canonic* s *este adesea foarte dificilă, chiar imposibilă, deoarece integrala care defineşte parametrul canonic conduce la funcţii de* $s(t)$ *extrem de complicate, funcţii care nu pot fi uşor inversate.*

Exemplul 5.5.11 *Să se reparametrizeze prin lungimea de arc elicea circulară*

$$C = \operatorname{Im} c,$$

unde

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \ a > 0, \ b \neq 0.$$

Prin derivare, obţinem

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b), \ \forall \ t \in [0, 2\pi].$$

Norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi].$$

Atunci, parametrul lungime de arc este

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\sigma = t \cdot \sqrt{a^2 + b^2}, \ \forall \ t \in [0, 2\pi].$$

iar inversul parametrului canonic este

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \forall\ s \in [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2+b^2}].$$

În concluzie, reparametrizarea canonică a elicei circulare $C = \operatorname{Im} c$ *este dată de*

$$\widetilde{c} : [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2+b^2}] \to \mathbb{R}^3,$$

$$\widetilde{c}(s) = c(t(s)) = \left(a \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot s\right).$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c} = \operatorname{Im} c = C$$

şi

$$||\dot{\widetilde{c}}(s)|| = 1,\ \forall\ s \in [0, 2\pi \cdot \sqrt{a^2+b^2}].$$

5.6 Interpretări geometrice ale curburii și torsiunii

Deoarece orice curbă parametrizată regulată în spaţiu poate fi reparametrizată prin lungimea de arc, să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3,\ c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, diferită de un segment de dreaptă. Atunci, rezultă că avem

$$v(s) = ||\dot{c}(s)|| = 1 \Leftrightarrow (x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1,\ \forall\ s \in [0, L],$$

şi

$$||\ddot{c}(s)|| > 0,\ \forall\ s \in [0, L].$$

În acest context, ţinând seama de formulele de invarianţă demonstrate anterior şi alegând o orientare convenabilă a curbei în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, expresiile elementelor triedrului lui Frénet, expresia curburii, expresia torsiunii, precum şi formulele lui Frénet, se simplifică după cum urmează:

$$T(s) = \dot{c}(s),\ N(s) = \frac{1}{||\ddot{c}(s)||} \cdot \ddot{c}(s),\ B(s) = T(s) \times N(s),$$

$$k(s) = ||\ddot{c}(s)||,\ \tau(s) = \frac{(\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dddot{c}(s))}{||\ddot{c}(s)||^2}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = k(s) \cdot N(s) \\ \dfrac{dN}{ds} = -k(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s) \\ \dfrac{dB}{ds} = -\tau(s) \cdot N(s). \end{cases}$$

Teorema 5.6.1 *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-un plan dacă şi numai dacă are torsiunea nulă în fiecare punct al ei.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Să considerăm că $C = \operatorname{Im} c$, unde $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, este o curbă în spaţiu, nu neapărat parametrizată canonic, şi să presupunem că ea este inclusă într-un plan care trece prin punctul $C_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are un vector normal constant $\overline{n} \neq \overline{0}$. Atunci, avem adevărată relaţia

$$\left\langle c(t) - \overline{C}_0, \overline{n} \right\rangle = 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

unde $\overline{C}_0$ este vectorul de poziţie al punctului $C_0(x_0, y_0, z_0)$. Prin derivare deducem că

$$\langle \dot{c}(t), \overline{n} \rangle = \langle \ddot{c}(t), \overline{n} \rangle = \langle \dddot{c}(t), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

adică vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ sunt coplanari. În concluzie, obţinem

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = 0, \ \forall \ t \in [a, b],$$

adică

$$\tau(t) = 0, \ \forall \ t \in [a, b].$$

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţia

$$\tau(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Atunci, din formulele lui Frénet deducem imediat că

$$\frac{dB}{ds} = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică există un vector constant nenul $\overline{n} \in V_3$ astfel încât

$$B(s) = \overline{n}, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Fie funcţia derivabilă $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(s) = \langle c(s) - c(0), \overline{n} \rangle .$$

Prin derivare deducem că

$$f'(s) = \langle T(s), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică

$$f(s) = f(0) = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\langle c(s) - c(0), \overline{n} \rangle = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În concluzie, dacă $c(0) = (x_0, y_0, z_0)$ şi $\overline{n} = (A, B, C)$, atunci obţinem

$$A \cdot [x(s) - x_0] + B \cdot [y(s) - y_0] + C \cdot [z(s) - z_0] = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Cu alte cuvinte, curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă într-un plan de normală $\overline{n} \neq \overline{0}$, care trece prin punctul $C_0(x_0, y_0, z_0)$. ∎

Teorema 5.6.2 *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-un cerc de rază $r > 0$ dacă şi numai dacă are torsiunea nulă $\tau(s) = 0$ şi curbura constantă $k(s) = 1/r$ în fiecare punct al ei.*

Demonstraţie. " $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţiile

$$\tau(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

şi

$$k(s) = \frac{1}{r}, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Atunci, din teorema anterioară rezultă că curba C are imaginea inclusă într-un plan. Să considerăm curba

$$\widetilde{c}(s) = c(s) + r \cdot N(s), \ \forall \ s \in [0, L].$$

Prin derivare şi utilizând formulele lui Frénet, găsim

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = \dot{c}(s) + r \cdot \frac{dN}{ds} = T(s) + r \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot T(s) \right) = \overline{0}, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică există un vector constant $\overline{C}_0 \in V_3$ astfel încât

$$\widetilde{c}(s) = c(s) + r \cdot N(s) = \overline{C}_0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

În concluzie, avem

$$\left| \left| c(s) - \overline{C}_0 \right| \right|^2 = ||-rN(s)||^2 = r^2, \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă în cercul centrat în punctul C_0 şi de rază $r > 0$, unde vectorul de poziţie al punctului C_0 este vectorul $\overline{C}_0$.

" $\Rightarrow$ " Să considerăm că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde $c(s)$ este parametrizarea canonică, este inclusă într-un cerc centrat în punctul C_0 şi de rază $r > 0$. Atunci, pe de o parte, deoarece cercul este o curbă plană, deducem că

$$\tau(s) = 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Pe de altă parte, ţinând cont de proprietăţile geometrice ale cercului pe care fixăm o orientare convenabilă, deducem că

$$N(s) = \frac{1}{r} \left[\overline{C}_0 - c(s) \right], \ \forall \ s \in [0, L],$$

unde vectorul $\overline{C}_0$ este vectorul de poziţie al punctului C_0. Utilizând formulele lui Frénet, găsim

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{r} \cdot T(s) = -k(s) \cdot T(s), \ \forall \ s \in [0, L],$$

adică

$$k(s) = \frac{1}{r}, \ \forall \ s \in [0, L].$$

■

Teorema 5.6.3 *O curbă în spaţiu are imaginea inclusă într-o elice circulară dacă şi numai dacă are torsiunea constantă nenulă $\tau(s) = \tau \neq 0$ şi curbura constantă pozitivă $k(s) = k > 0$ în fiecare punct al ei.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Să considerăm elicea circulară $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \ a > 0, \ b \neq 0.$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), \ \ddot{c}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

şi

$$\dddot{c}(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ este

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \equiv (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

iar produsul mixt între vectorii $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ şi $\dddot{c}(t)$ este

$$(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Normele vectorilor $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ sunt

$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ şi } ||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Prin urmare, curbura şi torsiunea elicei circulare $C = \operatorname{Im} c$ sunt

$$k(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

şi

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \neq 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R}, .$$

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c : [0, L] \to \mathbb{R}^3, \ s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

este o curbă în spaţiu parametrizată canonic, care verifică relaţiile

$$\tau(s) = \tau \neq 0, \ \forall \ s \in [0, L],$$

şi

$$k(s) = k > 0, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Fie $\theta \in (0, \pi)$ astfel încât

$$\cot\theta = \frac{\tau}{k}$$

şi fie vectorul

$$U(s) = T(s) \cdot \cos\theta + B(s) \cdot \sin\theta, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Prin derivare şi utilizând formulele lui Frénet, deducem că

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dT}{ds} \cdot \cos\theta + \frac{dB}{ds} \cdot \sin\theta = (k\cos\theta - \tau\sin\theta) \cdot N(s) = \overline{0}, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică există un vector constant nenul $\overline{U} \in V_3$ astfel încât

$$U(s) = \overline{U}, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Să considerăm acum funcţia derivabilă $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(s) = \left\langle c(s) - c(0), \overline{U} \right\rangle.$$

Prin derivare deducem că

$$f'(s) = \left\langle T(s), \overline{U} \right\rangle = \cos\theta, \ \forall\ s \in [0, L],$$

adică, prin integrare, avem

$$f(s) = s \cdot \cos\theta + s_0, \ \forall\ s \in [0, L],$$

unde $s_0 \in \mathbb{R}$. Deoarece avem $f(0) = 0$, rezultă că $s_0 = 0$, adică

$$f(s) = s \cdot \cos\theta, \ \forall\ s \in [0, L],$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\left\langle c(s) - c(0), \overline{U} \right\rangle = s \cdot \cos\theta, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Ţinând cont de faptul că

$$\left|\left|\overline{U}\right|\right|^2 = \left\langle \overline{U}, \overline{U} \right\rangle = 1,$$

relaţia de mai sus este echivalentă cu relaţia

$$\left\langle c(s) - c(0) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{U}, \overline{U} \right\rangle = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

Aceasta înseamnă că curba în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im} \widetilde{c}$, unde

$$\widetilde{c}(s) = c(s) - c(0) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{U}, \ \forall\ s \in [0, L],$$

este situată în planul care trece prin originea $O(0, 0, 0)$ şi are direcţia normală dată de versorul constant $\overline{U}$, adică avem

$$\widetilde{\tau}(s) = 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

În acelaşi timp, prin derivări succesive şi folosind formulele lui Frénet, găsim

$$\dot{\widetilde{c}}(s) = T(s) - \cos\theta \cdot \overline{U} \text{ şi } \ddot{\widetilde{c}}(s) = k \cdot N(s).$$

Produsul vectorial al vectorilor $\dot{\widetilde{c}}(s)$ şi $\ddot{\widetilde{c}}(s)$ este

$$\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s) = \left[T(s) - \cos\theta \cdot \overline{U}\right] \times [k \cdot N(s)] = k \cdot \sin\theta \cdot \overline{U}$$

iar normele vectorilor $\dot{\widetilde{c}}(s)$ şi $\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)$ sunt

$$\left\|\dot{\widetilde{c}}(s)\right\| = \sin\theta \text{ şi } \left\|\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)\right\| = k \cdot \sin\theta.$$

Prin urmare, curbura curbei în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$ este constantă

$$\widetilde{k}(s) = \frac{\left\|\dot{\widetilde{c}}(s) \times \ddot{\widetilde{c}}(s)\right\|}{\left\|\dot{\widetilde{c}}(s)\right\|^3} = \frac{k}{\sin^2\theta} > 0, \ \forall\ s \in [0, L].$$

În concluzie, curba în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$ este inclusă într-un cerc centrat într-un punct arbitrar C_0 şi de rază

$$r = \frac{\sin^2\theta}{k},$$

cerc situat în planul care trece prin originea $O(0, 0, 0)$ şi are direcţia normală dată de versorul constant $\overline{U}$.

În final, pentru simplificare, putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei (efectuăm eventual o translaţie şi o rotaţie în spaţiu), că

$$C_0 = c(0) = (0, 0, 0) \text{ şi } \overline{U} = \overline{k}.$$

În acest context geometric, cercul de rază

$$r = \frac{\sin^2\theta}{k},$$

situat în planul xOy, având centrul în originea $O(0, 0, 0)$ şi având o parametrizare de viteză constantă

$$\widetilde{v}(s) = \left\|\dot{\widetilde{c}}(s)\right\| = \sin\theta,$$

este definit de parametrizarea regulată

$$\widetilde{c}(s) = \left(\frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ \frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ 0\right),\ \forall\ s \in [0, L].$$

Ţinând cont de faptul că

$$\widetilde{c}(s) = c(s) - s \cdot \cos\theta \cdot \overline{k},\ \forall\ s \in [0, L],$$

deducem că

$$c(s) = \left(\frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ \frac{\sin^2\theta}{k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot s}{\sin\theta}\right),\ s \cdot \cos\theta\right),\ \forall\ s \in [0, L].$$

Deoarece

$$\cos\theta = \frac{\tau}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \text{ şi } \sin\theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \tau^2}},$$

obţinem

$$c(s) = \left(\frac{k}{k^2 + \tau^2} \cos\left(s\sqrt{k^2 + \tau^2}\right),\ \frac{k}{k^2 + \tau^2} \sin\left(s\sqrt{k^2 + \tau^2}\right),\ \frac{\tau}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \cdot s\right).$$

Cu alte cuvinte, notând

$$a = \frac{k}{k^2+\tau^2} > 0 \text{ şi } b = \frac{\tau}{k^2+\tau^2} \neq 0,$$

rezultă că curba $C = \operatorname{Im} c$ este inclusă în elicea circulară parametrizată canonic, definită prin

$$c(s) = \left(a \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot s\right),\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

■

5.7 Probleme rezolvate

1. Să se arate că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(a \cos^2 t, a\sqrt{2} \sin t \cos t, a \sin^2 t\right),\ a > 0,\ t \in \mathbb{R},$$

are imaginea inclusă într-un con.

Rezolvare. Eliminând parametrul $t \in \mathbb{R}$, găsim că avem $C = \operatorname{Im} c \subset \Sigma$, unde $\Sigma : y^2 = 2xz$. Efectuând rotaţia în spaţiu

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + z'), \end{cases}$$

deducem că cuadrica Σ este conul cu vârful în origine, definit de ecuaţia

$$\Sigma : (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0.$$

Curba dată se află la intersecţia acestui con cu planul $\pi : x + z = a$. ■

2. Să se determine o parametrizare a *curbei lui Viviani*

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx, \end{cases}$$

unde $R > 0$, $(x, y, z) \neq (R, 0, 0)$.

Rezolvare. În ecuaţia cilindrului $y^2 = Rx - x^2$ luăm $x(t) = R \sin^2 t$, $t \in [0, \pi/2)$. Deducem că $y(t) = R \sin t \cos t$ şi $z(t) = \pm R \cos t$. Prin urmare, curba lui Viviani este imaginea parametrizării

$$c : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = \left(R \sin^2 t, R \sin t \cos t, \pm R \cos t\right),$$

adică avem $C = \operatorname{Im} c$. ■

3. Să se scrie ecuaţiile dreptelor tangente şi a planelor normale la curbele în spaţiu C_1 şi C_2 în punctele precizate:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1,\ c_1(t) = \left(a(1-\cos t), a\sin t, 2a\cos\dfrac{t}{2}\right)$, $a > 0$, în $P\left(a, a, a\sqrt{2}\right)$;

   (b) $C_2 : x^2+z^2-4 = 0,\ x^2+y^2-4 = 0,\ (x,y,z) \neq (\pm 2, 0, 0)$, în punctul $P(\sqrt{3}, 1, 1)$.

Rezolvare. (a) Punctul P este corespunzător lui $t = \pi/2$ iar vectorul viteză al curbei $C_1 = \operatorname{Im} c_1$ este

$$\dot{c}_1(t) = \left(a\sin t, a\cos t, -a\sin\frac{t}{2}\right).$$

Prin urmare avem $\dot{c}_1(\pi/2) = (a, 0, -a\sqrt{2}/2)$. Rezultă că ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul P sunt:

$$T_P C_1 : \frac{x-a}{a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-a\sqrt{2}}{-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2}z - 3a = 0 \\ y - a = 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{aligned} N_P C_1 &: (x-a)\cdot a + (y-a)\cdot 0 - \left(z - a\sqrt{2}\right)\frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ N_P C_1 &: ax - \frac{a\sqrt{2}}{2}z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - z = 0. \end{aligned}$$

(b) Gradienţii funcţiilor $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - 4$ şi $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4$ sunt:

$$grad(f)(x,y,z) = (2x, 0, 2z) \text{ şi } grad(g)(x,y,z) = (2x, 2y, 0).$$

În particular, obţinem

$$grad(f)(P) = (2\sqrt{3}, 0, 2) \text{ şi } grad(g)(P) = (2\sqrt{3}, 2, 0).$$

Produsul vectorial al gradienţilor este

$$[grad(f) \times grad(g)](P) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot\bar{i} + 4\sqrt{3}\cdot\bar{j} + 4\sqrt{3}\cdot\bar{k}.$$

Prin urmare, ecuaţiile dreptei tangente şi a planului normal în punctul P sunt:

$$T_P C_2 : \frac{x-\sqrt{3}}{-4} = \frac{y-1}{4\sqrt{3}} = \frac{z-1}{4\sqrt{3}}$$

şi

$$\begin{aligned} N_P C_2 &: \left(x - \sqrt{3}\right)\cdot(-4) + (y-1)\cdot 4\sqrt{3} + (z-1)\cdot 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\ N_P C_2 &: x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

■

4. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2\right), \ t \in \mathbb{R}^*,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Vectorul tangent la curbă într-un punct arbitrar este $\dot{c}(t) = (2t^3, -t^2, 2t)$ iar vectorul normal la plan este $\overline{n}_\pi(3, -2, -2)$. Dacă tangenta este paralelă cu planul, atunci vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\overline{n}_\pi$ sunt perpendiculari, adică avem

$$\langle \dot{c}(t), \overline{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow 6t^3 + 2t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ (nu convine)}, \ t_2 = -1, \ t_3 = \frac{2}{3}.$$

În concluzie, punctele căutate sunt:

$$P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right) \quad \text{şi} \quad P_3\left(\frac{8}{81}, -\frac{8}{81}, \frac{4}{9}\right).$$

■

5. Să se determine planele osculatoare la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(2t - 1, t^3, 1 - t^2\right), \ t \in \mathbb{R},$$

care sunt perpendiculare pe planul $\pi : 7x - 12y + 5z - 7 = 0$.

Rezolvare. Avem $x(t) = 2t - 1$, $y(t) = t^3$, $z(t) = 1 - t^2$ iar, prin derivări succesive, obţinem $x'(t) = 2$, $y'(t) = 3t^2$, $z'(t) = -2t$ şi $x''(t) = 0$, $y''(t) = 6t$, $z''(t) = -2$. Rezultă că ecuaţia planului osculator într-un punct curent al curbei $C = \operatorname{Im} c$ este

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x - 2t + 1 & y - t^3 & z + t^2 - 1 \\ 2 & 3t^2 & -2t \\ 0 & 6t & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi_0 : 6t^2x + 4y + 12tz - 4t^3 + 6t^2 - 12t = 0.$$

Vectorul normal la planul osculator este $\overline{n}_0(6t^2, 4, 12t)$ iar normala la planul π este $\overline{n}_\pi(7, -12, 5)$. Condiţia ca cele două plane să fie perpendiculare este

$$\langle \overline{n}_0, \overline{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow 42t^2 + 60t - 48 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, \ t_2 = \frac{4}{7}.$$

Prin urmare, ecuaţiile planelor osculatoare căutate sunt

$$\pi^{\text{Osc}}_{(t=-2)} : 6x + y - 6z + 20 = 0$$

şi

$$\pi^{\text{Osc}}_{(t=4/7)} : 168x + 343y + 588z - 484 = 0.$$

■

6. Să se scrie ecuaţiile binormalelor la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 2t^2 - 1\right), \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

care sunt perpendiculare pe dreapta $d : x + y = 0,\ 4x - z = 0$.

Rezolvare. Prin derivări succesive obţinem $\dot{c}(t) = (-1/t^2, 1, 4t)$ şi $\ddot{c}(t) = (2/t^3, 0, 4)$. Binormala într-un punct curent al curbei în spaţiu este direcţionată de vectorul

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1/t^2 & 1 & 4t \\ 2/t^3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \bar{i} + \frac{12}{t^2} \cdot \bar{j} - \frac{2}{t^3} \cdot \bar{k}.$$

Normalele la planele care determină dreapta d sunt reprezentate de vectorii $\overline{n}_1(1, 1, 0)$ şi $\overline{n}_2(4, 0, -1)$ iar direcţia dreptei d este dată de vectorul

$$\overline{v} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}.$$

Condiţia de perpendicularitate a binormalei cu dreapta d este

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t), \overline{v} \rangle &= 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{12}{t^2} + \frac{8}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_1 = t_2 = -1,\ t_3 = 2. \end{aligned}$$

În concluzie, binormalele căutate au ecuaţiile

$$B_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{1}$$

şi

$$B_2 : \frac{x - \frac{1}{2}}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{-\frac{1}{4}}.$$

■

7. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe în spaţiu:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1,\ c_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, unde

   $$c_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t);$$

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2,\ c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, unde

   $$c_2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}, t\right).$$

Rezolvare. (a) Vectorul viteză al curbei C_1 este

$$\dot{c}_1(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t\big)$$

iar norma vectorului viteză este $||\dot{c}_1(t)|| = e^t\sqrt{3}$. În concluzie, avem

$$L(C_1) = \int_0^\pi e^t\sqrt{3}dt = \sqrt{3}e^t\Big|_0^\pi = \sqrt{3}(e^\pi - 1).$$

(b) Vectorul viteză al curbei C_2 este

$$\dot{c}_2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, 1\right)$$

iar norma vectorului viteză este

$$||\dot{c}_2(t)|| = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}}.$$

În concluzie, avem

$$L(C_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(e^t + e^{-t}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^t\Big|_0^1 - e^{-t}\Big|_0^1\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

■

8. Să se arate că curbele în spaţiu nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;
   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. (a) Avem $\dot{c}_1(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 1)$, ceea ce implică

$$||\dot{c}_1(t)|| = \sqrt{5} \neq 1.$$

Construim parametrul canonic prin lungimea de arc

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_1(\sigma)||d\sigma = \int_0^t \sqrt{5}d\sigma = \sqrt{5}t.$$

Scriind t în funcţie de s, găsim $t = s/\sqrt{5}$. Cu alte cuvinte, avem reparametrizarea canonică $C_1 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, unde

$$\widetilde{c}_1(s) = \left(\cos\frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{s}{\sqrt{5}}\right).$$

(b) Avem $\dot{c}_2(t) = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2)$, ceea ce implică

$$||\dot{c}_2(t)|| = \left(e^t + e^{-t}\right)\sqrt{2} \neq 1.$$

Construim parametrul canonic prin lungimea de arc

$$s = \int_0^t ||\dot{c}_2(\sigma)||d\sigma = \sqrt{2}\int_0^t \left(e^\sigma + e^{-\sigma}\right) d\sigma = \sqrt{2}\left(e^t - e^{-t}\right).$$

Scriind t în funcţie de s, găsim

$$0 < e^t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 8}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \ln\frac{s + \sqrt{s^2 + 8}}{2\sqrt{2}}.$$

Cu alte cuvinte, avem $C_2 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_2$, $\widetilde{c}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{c}_2(s) = (x(s), y(s), z(s))$, unde

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{s+\sqrt{s^2+8}}, \\ y(s) &= \frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{s+\sqrt{s^2+8}}, \\ z(s) &= 2\ln\frac{s+\sqrt{s^2+8}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

■

9. Să se determine curburile şi torsiunile următoarelor curbe în spaţiu:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1, c_1(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t > 0$, într-un punct arbitrar;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2, c_2(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$, în punctul $P(0, 1, -1)$.

Rezolvare. (a) Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}_1(t) = \left(2, 2t, \frac{1}{t}\right), \ \ddot{c}_1(t) = \left(0, 2, -\frac{1}{t^2}\right), \ \dddot{c}_1(t) = \left(0, 0, \frac{2}{t^3}\right).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_1(t)$ şi $\ddot{c}_1(t)$ este

$$\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2t & 1/t \\ 0 & 2 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{t}\bar{i} + \frac{2}{t^2}\bar{j} + 4\bar{k},$$

ceea ce implică

$$||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)|| = \frac{2(2t^2+1)}{t^2}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_1(t)|| = \frac{2t^2+1}{t}$$

şi

$$(\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t)) = \begin{vmatrix} 2 & 2t & 1/t \\ 0 & 2 & -1/t^2 \\ 0 & 0 & 2/t^3 \end{vmatrix} = \frac{8}{t^3},$$

rezultă că curbura are expresia

$$k(t) = \frac{||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)||}{||\dot{c}_1(t)||^3} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t))}{||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)||^2} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}.$$

(b) Este evident că punctul $P(0, 1, -1) \in C_2$ este corespunzător valorii $t = \pi/2$. Mai mult, prin derivări succesive obţinem

$$\begin{aligned} &\dot{c}_2(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin 2t) \Rightarrow \dot{c}_2(\pi/2) = (-1, 0, 0), \\ &\ddot{c}_2(t) = (-\cos t, -\sin t, -4\cos 2t) \Rightarrow \ddot{c}_2(\pi/2) = (0, -1, 4), \\ &\dddot{c}_2(t) = (\sin t, -\cos t, 8\sin 2t) \Rightarrow \dddot{c}_2(\pi/2) = (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_2(\pi/2)$ şi $\ddot{c}_2(\pi/2)$ este

$$\dot{c}_2(\pi/2) \times \ddot{c}_2(\pi/2) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\overline{j} + \overline{k},$$

ceea ce implică $||\dot{c}_2(\pi/2) \times \ddot{c}_2(\pi/2)|| = \sqrt{17}$. Deoarece avem $||\dot{c}_2(\pi/2)|| = 1$ şi

$$(\dot{c}_2(\pi/2), \ddot{c}_2(\pi/2), \dddot{c}_2(\pi/2)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că curbura în punctul P are expresia

$$k(P) = \frac{||\dot{c}_2(\pi/2) \times \ddot{c}_2(\pi/2)||}{||\dot{c}_2(\pi/2)||^3} = \sqrt{17},$$

iar torsiunea în punctul P este dată de

$$\tau(P) = \frac{(\dot{c}_2(\pi/2), \ddot{c}_2(\pi/2), \dddot{c}_2(\pi/2))}{||\dot{c}_2(\pi/2) \times \ddot{c}_2(\pi/2)||^2} = 0.$$

■

10. Să se determine versorii triedrului lui Frénet, ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea, în punctul precizat, la curbele:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t^2, t, t^3 - 20)$, $t \in \mathbb{R}$, într-un punct arbitrar;
   (b) $C_2 : x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2$, în punctul $P(1, 1, \sqrt{3})$.

Rezolvare. (a) Prin derivări succesive obţinem

$$\dot{c}_1(t) = \left(2t, 1, 3t^2\right), \ \ddot{c}_1(t) = (2, 0, 6t), \ \dddot{c}_1(t) = (0, 0, 6).$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_1(t)$ şi $\ddot{c}_1(t)$ este

$$\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix} = 6t\overline{i} - 6t^2\overline{j} - 2\overline{k}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_1(t)|| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

şi

$$||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)|| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1},$$

rezultă că versorul tangent este

$$T(t) = \frac{1}{||\dot{c}_1(t)||} \cdot \dot{c}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \cdot \left(2t, 1, 3t^2\right)$$

iar versorul binormal este

$$B(t) = \frac{\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)}{||\dot{c}_1(t) \times \ddot{c}_1(t)||} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}} \cdot \left(3t, -3t^2, -1\right).$$

Deducem că versorul normal este

$$\begin{aligned}
N(t) &= B(t) \times T(t) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}\cdot\sqrt{9t^4+4t^2+1}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3t & -3t^2 & -1 \\ 2t & 1 & 3t^2 \end{vmatrix} \equiv \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}\cdot\sqrt{9t^4+4t^2+1}} \cdot \left(1-9t^4, -9t^3-2t, 6t^3+3t\right).
\end{aligned}$$

În consecinţă, ecuaţia tangentei este

$$\frac{x-t^2}{2t} = \frac{y-t}{1} = \frac{z-t^3+20}{3t^2},$$

ecuaţia binormalei este

$$\frac{x-t^2}{3t} = \frac{y-t}{-3t^2} = \frac{z-t^3+20}{-1}$$

iar ecuaţia normalei principale este

$$\frac{x-t^2}{1-9t^4} = \frac{y-t}{-t(9t^2+2)} = \frac{z-t^3+20}{3t(2t^2+1)}.$$

Ecuaţia planului normal este

$$\left(x-t^2\right)\cdot 2t + (y-t)\cdot 1 + \left(z-t^3+20\right)\cdot 3t^2 = 0,$$

ecuaţia planului osculator este

$$\left(x-t^2\right)\cdot 3t + (y-t)\cdot\left(-3t^2\right) - \left(z-t^3+20\right) = 0$$

iar ecuaţia planului rectificant este

$$\left(x-t^2\right)\left(1-9t^4\right) - t\,(y-t)\,(9t^2+2) + 3t\left(z-t^3+20\right)(2t^2+1) = 0.$$

În final, deoarece avem

$$(\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t)) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12,$$

rezultă că curbura are expresia

$$k(t) = \frac{||\dot{c}_1(t)\times\ddot{c}_1(t)||}{||\dot{c}_1(t)||^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(9t^4+4t^2+1)\sqrt{9t^4+4t^2+1}},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}_1(t), \ddot{c}_1(t), \dddot{c}_1(t))}{||\dot{c}_1(t)\times\ddot{c}_1(t)||^2} = \frac{-3}{9t^4+9t^2+1}.$$

(b) Fie funcţiile $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - 4$ şi $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$. Deoarece avem

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{array}\right|_{P(1,1,\sqrt{3})} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 2z \\ 2y & 0 \end{array}\right|_{P(1,1,\sqrt{3})} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -4\sqrt{3} \neq 0,$$

rezultă din Teorema Funcţiilor Implicite că din sistemul de ecuaţii $f(x,y,z) = 0$ şi $g(x,y,z) = 0$ putem scoate pe y şi z ca funcţii de x. În consecinţă, putem parametriza local curba $C_2 = \operatorname{Im} c_2$ luând $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, unde

$$f(t, y(t), z(t)) = 0 \text{ şi } g(t, y(t), z(t)) = 0.$$

Mai mult, avem $y(1) = 1$ şi $z(1) = \sqrt{3}$ şi deci punctul $P(1,1,\sqrt{3})$ este corespunzător valorii $t = 1$.

Prin derivarea ecuaţiilor $t^2 + y^2 - 2 = 0$ şi $t^2 + z^2 - 4 = 0$ găsim relaţiile

$$t + yy' = 0,\ t + zz' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{t}{y},\ z' = -\frac{t}{z} \Rightarrow y'(1) = -1,\ z'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Derivând din nou, obţinem

$$\begin{aligned} & 1 + (y')^2 + yy'' = 0,\ 1 + (z')^2 + zz'' = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y},\ z' = -\frac{1 + (z')^2}{z} \Rightarrow \\ & \Rightarrow y''(1) = -2,\ z''(1) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Derivând în continuare, deducem că

$$\begin{aligned} & 3y'y'' + yy''' = 0,\ 3z'z'' + zz''' = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow y''' = -\frac{3y'y''}{y},\ z' = -\frac{3z'z''}{z} \Rightarrow \\ & \Rightarrow y'''(1) = -6,\ z'''(1) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Prin derivări succesive obţinem

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= (1, y', z') \Rightarrow \dot{c}_2(1) = \left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \ddot{c}_2(t) &= (0, y'', z'') \Rightarrow \ddot{c}_2(1) = \left(0, -2, -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right), \\ \dddot{c}_2(t) &= (0, y''', z''') \Rightarrow \dddot{c}_2(1) = \left(0, -6, -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Produsul vectorial între vectorii $\dot{c}_2(1)$ şi $\ddot{c}_2(1)$ este

$$\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1) = \left|\begin{array}{ccc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -4/(3\sqrt{3}) \end{array}\right| = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Deoarece avem

$$||\dot{c}_2(1)|| = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

şi

$$||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)|| = \sqrt{\frac{128}{27}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

rezultă că versorul tangent este

$$T(1) = \frac{1}{||\dot{c}_2(1)||} \cdot \dot{c}_2(1) = \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

iar versorul binormal este

$$B(1) = \frac{\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)}{||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)||} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, -1\right).$$

Deducem că versorul normal este

$$\begin{aligned} N(1) &= B(1) \times T(1) = \frac{9}{4\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1/(3\sqrt{3}) & 2/(3\sqrt{3}) & -1 \\ 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{4\sqrt{14}} \cdot \left(11, 10, \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

În consecinţă, ecuaţia tangentei este

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{-\sqrt{3}} = \frac{z-\sqrt{3}}{-1},$$

ecuaţia binormalei este

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\sqrt{3}}{-3\sqrt{3}}$$

iar ecuaţia normalei principale este

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Ecuaţia planului normal este

$$(x-1) \cdot \sqrt{3} - (y-1) \cdot \sqrt{3} - \left(z - \sqrt{3}\right) = 0,$$

ecuaţia planului osculator este

$$-(x-1) + 2(y-1) - 3\sqrt{3}\left(z - \sqrt{3}\right) = 0$$

iar ecuaţia planului rectificant este

$$11(x-1) + 10(y-1) + \sqrt{3}\left(z - \sqrt{3}\right) = 0.$$

În final, deoarece avem

$$(\dot{c}_2(1), \ddot{c}_2(1), \dddot{c}_2(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -4/(3\sqrt{3}) \\ 0 & -6 & -4/(3\sqrt{3}) \end{vmatrix} = -\frac{16}{3\sqrt{3}},$$

rezultă că curbura are expresia

$$k(t) = \frac{||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)||}{||\dot{c}_2(1)||^3} = \frac{8\sqrt{2}}{7\sqrt{7}},$$

iar torsiunea este dată de formula

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}_2(1), \ddot{c}_2(1), \dddot{c}_2(1))}{||\dot{c}_2(1) \times \ddot{c}_2(1)||^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

■

5.8 Probleme propuse

1. Să se arate că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\frac{t}{1+t^2+t^4}, \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \frac{t^3}{1+t^2+t^4} \right), \ t \in \mathbb{R},$$

are imaginea inclusă într-o sferă.

R. Avem $C = \operatorname{Im} c \subset (S)$, unde

$$(S) : x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

2. Să se arate că curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(t^2 - 2t, \frac{1}{t^2} + t^2, t^2 - 2t - 1 \right), \ t \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\},$$

are imaginea inclusă într-un plan şi să se determine ecuaţia acestui plan.

R. Avem $C = \operatorname{Im} c \subset \pi$, unde $\pi : -x + z + 1 = 0$.

3. Să se scrie ecuaţia planului normal şi ecuaţiile tangentei la curba

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

unde $(x, y, z) \neq (0, \pm 1, 0)$, în punctul $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

R. $T_P C : \begin{cases} x - y - \sqrt{2} = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$; $N_P C : 2x + 2y + 2z - \sqrt{2} = 0.$

4. Să se scrie ecuaţia planului normal la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\ln t, 2t, t^2\right), \ t > 0,$$

care este paralel cu dreapta $d : x + 4y = 0,\ y - z = 0$.

R. $\pi^{\text{Normal}}_{(t=1)} : x + 2y + 2z - 6 = 0$.

5. Să se găsească ecuaţiile planelor osculatoare la curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(t^4 - 1, t^3 + 1, -2t\right), \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

care sunt paralele cu dreapta

$$d : \frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z}{2}.$$

R. $\pi^{\text{Osc}}_{(t=-2)} : x + 4y + 8z - 19 = 0;$

$\pi^{\text{Osc}}_{(t=-1)} : x + 2y + z - 2 = 0;$

$\pi^{\text{Osc}}_{(t=3)} : x - 6y - 27z - 74 = 0.$

6. Să se scrie ecuaţiile binormalelor la curba $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\frac{2}{t}, \ln t, -t^2\right), \ t > 0,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : x - y + 8z + 5 = 0$.

R. $B_{(t=2)} : \dfrac{x-1}{16} = \dfrac{y - \ln 2}{24} = \dfrac{z+4}{1}.$

7. Fie curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = (t, \sin t, \varphi(t)), \ t \in \mathbb{R}.$$

Să se determine funcţia $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ astfel încât binormalele curbei C să fie paralele cu planul xOz.

R. $\varphi(t) = at + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

8. Să se scrie ecuaţiile normalelor principale la curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(\frac{1}{t}, \ln t, t\right), \ t > 0,$$

care sunt paralele cu planul $\pi : 5x + 2y - 5z - 1 = 0$.

R. $N_{(t=1/2)} : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y + \ln 2}{5} = \dfrac{z - 1/2}{6};$

$N_{(t=1)} : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{3};$

$N_{(t=2)} : \dfrac{x - 1/2}{6} = \dfrac{y - \ln 2}{-5} = \dfrac{z-2}{4}.$

9. Să se găsească ecuaţia planului rectificant la curba în spaţiu $C = \operatorname{Im} c$, unde

$$c(t) = \left(t, t^2, t^3\right), \ t \in \mathbb{R},$$

care este paralel cu planul $\pi : 11x + 8y - 9z + 4 = 0$.

R. $\pi^{\text{Rectificant}}_{(t=1)} : 11x + 8y - 9z - 10 = 0$.

10. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe în spaţiu:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, unde $c_1(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2 : [0, 1/4] \to \mathbb{R}^3$, unde $c_2(t) = (t^2 - t, t^2 + 1, t)$.

R. (a) $L(C_1) = \ln(1 + \sqrt{3}) + \dfrac{\sqrt{3} - \ln 2}{2}$; (b) $L(C_2) = \dfrac{(4 + 3\ln 3)\sqrt{2}}{32}$.

11. Să se arate că curbele în spaţiu nu sunt parametrizate canonic şi, în consecinţă, să se reparametrizeze canonic prin lungimea de arc:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, unde $c_1(t) = \left(\cos t, \sin t, \dfrac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, unde $c_2(t) = \left(t\cos t, t\sin t, \dfrac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

R. (a) $2s = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + t\sqrt{t^2 + 1}$;

(b) $4\sqrt{2} \cdot s = 2\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{2}}\right) + 4t\sqrt{t^2 + \dfrac{1}{2}} + \ln 2$.

12. Să se determine curburile şi torsiunile următoarelor curbe în spaţiu:

   (a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\dfrac{t}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, într-un punct arbitrar;

   (b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(s) = \left(\dfrac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\dfrac{3}{5}\cos s\right)$, unde $s > 0$ este parametrul canonic, într-un punct arbitrar;

   (c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (t, t^2, t^4)$, în punctul $P(t = 1)$;

   (d) $C_4 = \operatorname{Im} c_4$, $c_4(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$, în punctul $P(1, 1, 0)$.

R. (a) $k(t) = \dfrac{1}{4}\sqrt{1 + \sin^2\dfrac{t}{2}}$; $\tau(t) = \dfrac{(\cos t - 5)\cos(t/2)}{4(3 - \cos t)}$.

(b) $k(s) = 1$; $\tau(s) = 0$.

(c) $k(P) = 2\sqrt{101}/(21\sqrt{21})$; $\tau(P) = 12/101$.

(d) $k(P) = \sqrt{2}/4$; $\tau(P) = -\sqrt{2}/4$.

13. Să se determine versorii triedrului lui Frénet, ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frénet, curbura şi torsiunea, în punctul precizat, la curbele:

(a) $C_1 = \operatorname{Im} c_1$, $c_1(t) = (t^2, 1-t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, într-un punct arbitrar;

(b) $C_2 = \operatorname{Im} c_2$, $c_2(t) = (t\cos t, -t\sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, într-un punct arbitrar;

(c) $C_3 = \operatorname{Im} c_3$, $c_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, unde $\sin 2t \neq 0$, în $P(t = \pi/4)$;

(d) $C_4 : x = 3z^2$, $y = 6z^3$, $z \in \mathbb{R}$, într-un punct arbitrar.

R. (a) $T(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \cdot (2t, -1, 3t^2)$ – versorul tangent;

$B(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}} \cdot (-3t, -3t^2, 1)$ – versorul binormal;

$N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1} \cdot \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \cdot (1 - 9t^4, 9t^3 + 2t, 3t + 6t^3)$ – versorul normal;

$\dfrac{x - t^2}{2t} = \dfrac{y - 1 + t}{-1} = \dfrac{z - t^3}{3t^2}$ – tangenta;

$\dfrac{x - t^2}{-3t} = \dfrac{y - 1 + t}{-3t^2} = \dfrac{z - t^3}{1}$ – binormala;

$\dfrac{x - t^2}{1 - 9t^4} = \dfrac{y - 1 + t}{9t^3 + 2t} = \dfrac{z - t^3}{3t + 6t^3}$ – normala principală;

$-3t(x - t^2) - 3t^2(y - 1 + t) + z - t^3 = 0$ – planul osculator;

$2t(x - t^2) - y + 1 - t + 3t^2(z - t^3) = 0$ – planul normal;

$(1 - 9t^4)(x - t^2) + (9t^3 + 2t)(y - 1 + t) + (3t + 6t^3)(z - t^3) = 0$ – planul rectificant;

$k(t) = \dfrac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}$ – curbura;

$\tau(t) = \dfrac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$ – torsiunea.

(b) Se procedează ca la punctul (a).

(c) $T\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{5} \cdot \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -4\right)$ – versorul tangent în P;

$B\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{5} \cdot (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -3)$ – versorul binormal în P;

$N\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ – versorul normal în P;

$\dfrac{x - \sqrt{2}/4}{-3\sqrt{2}} = \dfrac{y - \sqrt{2}/4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{z}{-8}$ – tangenta în P;

$\dfrac{x - \sqrt{2}/4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{y - \sqrt{2}/4}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{z}{-3}$ – binormala în P;

$\dfrac{x-\sqrt{2}/4}{1}=\dfrac{y-\sqrt{2}/4}{1}=\dfrac{z}{0}$ – normala principală în P;

$2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-3z=0$ – planul osculator în P;

$-3\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y-8z=0$ – planul normal în P;

$2x+2y-\sqrt{2}=0$ – planul rectificant în P;

$k\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{6}{25}$ – curbura în P; $\tau\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{72}{225}$ – torsiunea în P.

(d) O parametrizare a curbei este $C_4=\operatorname{Im} c_4$, $c_4(t)=(3t^2,6t^3,t)$, $t\in\mathbb{R}$. În continuare, se procedează ca la punctul (a).

14. Fie curba în spaţiu $C=\operatorname{Im} c$, unde

$$c(t)=(\cos t,\sin t,\varphi(t))\,,\ t\in\mathbb{R}.$$

(a) Să se determine funcţia $\varphi\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ astfel încât curba C să fie o curbă plană.

(b) Cu φ astfel găsit, să se determine curbura şi torsiunea curbei, ştiind că

$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1,\ \varphi''(0)=-1.$$

R. (a) Punând condiţia $\tau(t)=0$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$, găsim ecuaţia diferenţială

$$\varphi'''(t)+\varphi'(t)=0,$$

care are soluţia generală

$$\varphi(t)=\alpha+\beta\cos t+\gamma\sin t,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

(b) Condiţiile impuse aplicaţiei $\varphi(t)$ implică constantele $\alpha=-1$, $\beta=1$ şi $\gamma=1$, adică avem

$$\varphi(t)=-1+\cos t+\sin t,\ t\in\mathbb{R}.$$

În acest caz, avem $k(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{(2-\sin 2t)\sqrt{(2-\sin 2t)}}$ şi $\tau(t)=0$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

6. SUPRAFEȚE

În acest capitol vom defini riguros *suprafeţele* în spaţiul punctual euclidian E_3 şi vom studia principalele proprietăţi geometrice ale acestora. Totodată vom scoate în evidenţă nişte mărimi scalare (*curbură totală*, *curbură medie* şi *curburi principale*) care ne vor da informaţii asupra formei unei suprafeţe. Pe parcursul acestui capitol, prin aplicaţie diferenţiabilă vom înţelege o *aplicaţie netedă*, adică o aplicaţie diferenţiabilă de o infinitate de ori pe un domeniu deschis, convenabil ales, în sensul că acesta este inclus în domeniile de definiţie ale aplicaţiei studiate şi derivatelor acesteia.

6.1 Definiții și exemple

Definiţia 6.1.1 *O aplicaţie injectivă şi diferenţiabilă $r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, unde D este un domeniu deschis, definită prin*

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ \forall\ (u, v) \in D,$$

unde

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall\ (u, v) \in D,$$

*se numeşte **hartă (de coordonate)**.*

Observaţia 6.1.2 *Condiţia de regularitate*

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall\ (u, v) \in D,$$

este echivalentă cu condiţia

$$r_u \times r_v \neq \overline{0},\ \forall\ (u, v) \in D,$$

unde

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ şi } r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

*Un punct $(u, v) \in D$ cu proprietatea $r_u \times r_v = \overline{0}$ se numeşte **punct singular** al aplicaţiei r.*

Definiţia 6.1.3 *O hartă*

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

cu proprietatea că inversa ei pe imagine

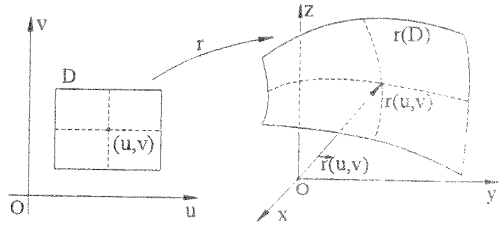
$$r^{-1} : r(D) \subseteq \mathbb{R}^3 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$$

*este diferenţiabilă se numeşte **hartă proprie.***

Definiţia 6.1.4 *Mulţimea de puncte din spaţiu*

$$\operatorname{Im} r \overset{not}{=} r(D) \overset{not}{=} \{P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in D\} \subseteq E_3,$$

*care reprezintă imaginea hărţii proprii $r(u,v)$, se numeşte **suprafaţă parametrizată regulată simplă**.*



Suprafaţa parametrizată simplă $\Sigma = \operatorname{Im} r = r(D)$

Definiţia 6.1.5 *O mulţime nevidă Σ de puncte din spaţiu cu proprietatea că pentru fiecare punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ există în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate V a punctului M_0 şi există o hartă proprie*

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

astfel încât

$$\Sigma \cap V = \operatorname{Im} r$$

*se numeşte **suprafaţă**.*

Observaţia 6.1.6 *Intuitiv vorbind, o mulţime de puncte din spaţiu $\Sigma \neq \emptyset$ este o suprafaţă dacă într-o vecinătate suficient de mică a fiecărui punct $M_0 \in \Sigma$ suprafaţa poate fi identificată cu o porţiune dintr-un plan.*

Observaţia 6.1.7 *Este evident că orice suprafaţă parametrizată simplă este o suprafaţă.*

Exemplul 6.1.8 *Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u,v) = (u, v, uv).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, v) \text{ şi } r_v = (0, 1, u).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = -v\overline{i} - u\overline{j} + \overline{k} \neq \overline{0}, \ \forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r, definită prin

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ r^{-1}(x, y, z) = (x, y),$$

unde $z = xy$, este diferenţiabilă, rezultă că aplicaţia diferenţiabilă r este o hartă proprie.

Imaginea hărţii proprii r este mulţimea de puncte

$$\operatorname{Im} r = r\,(D) = \{P(x, y, z) \mid xy - z = 0\}$$

şi deci $\operatorname{Im} r = r(D)$ este o suprafaţă parametrizată simplă. Cu alte cuvinte, cuadrica definită de ecuaţia

$$\Sigma : xy - z = 0$$

este o suprafaţă. Prin reducere la forma canonică deducem că cuadrica Σ este un paraboloid hiperbolic.

Exemplul 6.1.9 *Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă*

$$r : D = (-\pi, \pi) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos u, 2\cos 2u, 0) \text{ şi } r_v = (0, 0, 1).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos u & 2\cos 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos 2u\overline{i} - \cos u\overline{j} \neq \overline{0},\ \forall\ (u, v) \in D.$$

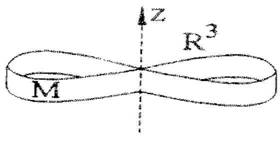
Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r este definită prin

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$r^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, z), & x < 0 \text{ şi } y > 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0 \\ (0, z), & x = y = 0 \\ (\arcsin x, z), & x \neq 0 \text{ şi } y/x \geq 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0 \\ (\pi - \arcsin x, z), & x > 0 \text{ şi } y < 0 \text{ şi } 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

unde $z \in (0, 1)$, deducem că aplicaţia r^{-1} nu este diferenţiabilă în punctele $(0, 0, z)$.

În concluzie, mulţimea de puncte din spaţiu $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ nu este o suprafaţă parametrizată simplă.



Mulţimea de puncte $M = \operatorname{Im} r = r(D)$

Mai mult, deoarece în vecinătatea oricărui punct de pe axa Oz mulţimea de puncte $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ nu poate fi privită ca imaginea unei hărţi proprii locale, ea semănând într-o asemenea vecinătate cu intersecţia a două plane, rezultă că, de fapt, mulţimea de puncte $M = \operatorname{Im} r = r(D)$ nu este o suprafaţă.

Exemplul 6.1.10 *Să considerăm sfera centrată în originea* $O(0,0,0)$ *şi de rază* $R=1$ *având ecuaţia*

$$\Sigma : x^2+y^2+z^2-1=0.$$

Fie aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

unde

$$D = \{(u,v) \mid u^2+v^2<1\},$$

definită prin

$$r(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) \text{ şi } r_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right).$$

Prin urmare, avem condiţia de regularitate

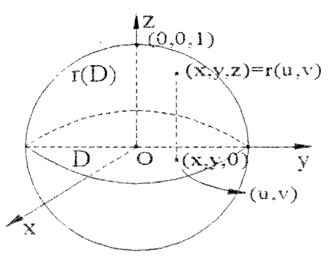
$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\overline{i} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\overline{j} + \overline{k} \neq \overline{0}, \ \forall\ (u,v) \in D. \end{aligned}$$

Deoarece inversa pe imagine a aplicaţiei r*, definită prin*

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ r^{-1}(x,y,z) = (x,y),$$

unde $x^2+y^2+z^2-1=0$ *şi* $z>0$*, este diferenţiabilă, rezultă că aplicaţia diferenţiabilă* r *este o hartă proprie.*

Imaginea $\operatorname{Im} r = r(D)$ *a hărţii proprii* r *este emisfera nordică a sferei* Σ *fără cercul ecuatorial.*



Parametrizarea emisferei nordice $\operatorname{Im} r = r(D)$

Prin analogie, din simetriile sferei, deducem că orice punct al sferei poate fi privit ca aparţinând unei emisfere parametrizate ca mai sus. În concluzie, sfera Σ *este o suprafaţă.*

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde D este un domeniu deschis din $\mathbb{R}^3$, o funcţie diferenţiabilă. Reamintim din analiza matematică faptul că pentru orice punct $P(x, y, z) \in D$ vectorul

$$grad(f)(P) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$$

se numeşte *gradientul* funcţiei f în punctul $P(x, y, z)$.

Definiţia 6.1.11 *Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care verifică relaţia*

$$grad(f)(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

*se numeşte **punct regulat** al funcţiei f. Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ care nu este regulat se numeşte **punct singular** al funcţiei f.*

În acest context, putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 6.1.12 *Mulţimea de puncte din spaţiu $P(x, y, z) \in E_3$ ale căror coordonate verifică relaţia*

$$\Sigma : f(x, y, z) = 0,$$

unde

$$grad(f)(P) \neq (0, 0, 0),\ \forall\ P \in \Sigma,$$

este o suprafaţă.

Demonstraţie. Să considerăm că $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ este un punct arbitrar al mulţimii de puncte Σ (i.e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $grad(f)(M_0) \neq (0, 0, 0)$). Deoarece condiţia

$$grad(f)(M_0) \neq (0, 0, 0)$$

este echivalentă cu condiţia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)^2 \neq 0,$$

să presupunem că

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \neq 0.$$

În condiţiile de mai sus, conform teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică aplicată funcţiei f şi punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$, deducem că există o vecinătate D a lui (x_0, y_0) în $\mathbb{R}^2$ şi există o funcţie diferenţiabilă

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

cu proprietăţile

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0,\ f(u, v, \varphi(u, v)) = 0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \varphi(u, v)) \neq 0,\ \forall\ (u, v) \in D.$$

Să considerăm acum aplicaţia injectivă şi diferenţiabilă

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)),$$

a cărei inversă pe imagine

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to D, \; r^{-1}(x,y,z) = (x,y),$$

unde $z = \varphi(x,y)$, este diferenţiabilă. Deoarece avem

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \; \forall \; (u,v) \in D,$$

deducem că aplicaţia diferenţiabilă r este o hartă proprie. Mai mult, luând în $\mathbb{R}^3$ o vecinătate convenabilă V a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, obţinem că

$$\Sigma \cap V = \operatorname{Im} r.$$

În concluzie, deoarece punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ a fost ales arbitrar, rezultă că mulţimea de puncte Σ este o suprafaţă. ∎

Definiţia 6.1.13 *O suprafaţă definită ca în teorema precedentă se numeşte* ***suprafaţă definită implicit****.*

Corolarul 6.1.14 *Orice cuadrică cu proprietatea că nu conţine nici un centru de simetrie (i.e.* ***elipsoidul****, în particular* ***sfera****,* ***hiperboloidul cu o pânză*** *sau* ***două****,* ***paraboloidul eliptic sau hiperbolic****,* ***conul fără vârf****,* ***cilindrul eliptic****, în particular* ***circular****,* ***cilindrul hiperbolic*** *sau* ***parabolic****,* ***reuniunea de plane paralele*** *şi* ***mulţimea vidă****) este o suprafaţă.*

Demonstraţie. Fie Σ o cuadrică arbitrară care nu conţine nici un centru de simetrie şi care este definită implicit de ecuaţia

$$\Sigma : g(x,y,z) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} g(x,y,z) \;=\; & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}. \end{aligned}$$

Vom demonstra prin reducere la absurd că

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(P)\right)^2 \neq 0, \; \forall \; P(x,y,z) \in \Sigma.$$

Să presupunem prin absurd că există un punct din spaţiu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aparţinând cuadricei Σ care verifică relaţia

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(M_0)\right)^2 = 0.$$

Atunci, deducem imediat că

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}(M_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y}(M_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z}(M_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0, \end{cases}$$

adică punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un centru de simetrie al cuadricei Σ. Acest lucru se află în contradicţie cu ipoteza că cuadrica Σ nu conţine nici un centru de simetrie.

În concluzie, cuadrica Σ este o suprafaţă. ∎

Exemplul 6.1.15 *Sfera de ecuaţie carteziană implicită*

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

unde $R > 0$, *este o suprafaţă. O hartă în sfera* (S) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (x_0 + R\cos u \sin v, y_0 + R \sin u \sin v, z_0 + R\cos v),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (S)$. *Deoarece inversa pe imagine a hărţii* r *este definită prin*

$$r^{-1} : r(D) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad r^{-1}(x, y, z) =$$

$$= \begin{cases} \left(\arccos \dfrac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \arccos \dfrac{z - z_0}{R}\right), & y \geq y_0 \\ \left(2\pi - \arccos \dfrac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \arccos \dfrac{z - z_0}{R}\right), & y < y_0, \end{cases}$$

unde $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2 = 0$, *deducem că aplicaţia* r^{-1} *nu este diferenţiabilă în punctele* $(x, 0, z)$, *unde* $(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$. *Prin urmare, harta* r *nu este o hartă proprie. Evident, restricţia hărţii* r *la unul din domeniile* $D_1 = (0, \pi) \times (0, \pi)$ *sau* $D_2 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$ *devine o hartă proprie.*

Exemplul 6.1.16 *Elipsoidul de ecuaţie carteziană implicită*

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *este o suprafaţă. O hartă în elipsoidul* (E) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (E)$.

Exemplul 6.1.17 *Hiperboloidul cu o pânză de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *este o suprafaţă. O hartă în hiperboloidul cu o pânză* (H_1) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (a \cosh u \sin v, b \cosh u \cos v, c \sinh u),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (H_1)$.

Exemplul 6.1.18 *Hiperboloidul cu două pânze de ecuaţie carteziană implicită*

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a, b, c > 0$, *este o suprafaţă. Nişte hărţi în hiperboloidul cu două pânze* (H_2) *sunt determinate de aplicaţiile diferenţiabile*

$$r_{1,2} : D = \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definite prin

$$r_{1,2}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u),$$

deoarece $\operatorname{Im} r_1 \cup \operatorname{Im} r_2 \subset (H_2)$.

Exemplul 6.1.19 *Paraboloidul eliptic de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

unde $a, b > 0$, *este o suprafaţă. O hartă în paraboloidul eliptic* (P_e) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (P_e)$.

Exemplul 6.1.20 *Paraboloidul hiperbolic de ecuaţie carteziană implicită*

$$(P_h^+) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

unde $a, b > 0$ *şi* $z \geq 0$, *este o suprafaţă. O hartă în paraboloidului hiperbolic* (P_h^+) *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (P_h^+)$.

Exemplul 6.1.21 *Conul de ecuaţie carteziană implicită*

$$(C'): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

unde $a, b, c > 0$ *şi* $z > 0$, *este o suprafaţă. O hartă în conul* (C') *este determinată de aplicaţia diferenţiabilă*

$$r : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$r(u, v) = (au \sin v, bu \cos v, cu),$$

deoarece $\operatorname{Im} r \subset (C')$.

Observaţia 6.1.22 *Din cele descrise până acum deducem că o* ***suprafaţă*** *poate fi descrisă în două feluri:*

(1) ***parametric*** *(ca imaginea unei hărţi proprii* $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*);*

(2) ***implicit*** *(ca o mulţime de puncte regulate* $\Sigma : f(x, y, z) = 0$*).*

Observaţia 6.1.23 *Din punct de vedere teoretic, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite din analiza matematică, orice suprafaţă definită implicit poate fi* ***parametrizată local propriu****, într-o vecinătate a fiecărui punct. Practic însă, o astfel de parametrizare locală proprie este dificil de exprimat în general. Pe cazuri particulare, prin artificii de calcul, pot fi găsite totuşi astfel de parametrizări locale proprii pentru suprafeţele definite implicit (vezi exemplele de mai sus). Este important de subliniat că hărţile locale prezentate în exemplele anterioare nu sunt în mod necesar nişte hărţi proprii. Impunând însă anumite restricţii geometrice convenabile asupra imaginilor lor* $\Sigma' = r(D)$, *care se reduc la nişte restricţii ale domeniului* D *(vezi cazul sferei), ele devin nişte* ***hărţi proprii locale****.*

6.2 Plan tangent și dreaptă normală

6.2.1 Suprafețe parametrizate

Să considerăm că $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

este o suprafaţă parametrizată simplă şi să considerăm că

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^2,\ c(t) = (u(t), v(t)),$$

este o curbă plană parametrizată.

Definiţia 6.2.2 *Curba în spaţiu*

$$\widetilde{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = (r \circ c)(t) = r(u(t), v(t)),$$

se numeşte ***ridicata curbei*** c ***pe suprafaţa*** Σ *sau, pe scurt,* ***curbă pe*** Σ.

Observaţia 6.2.3 *Orice curbă pe* Σ

$$\widetilde{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

este ridicata unei unice curbe plane

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^2, \; c(t) = (u(t), v(t)).$$

Această curbă plană este definită de relaţia

$$c = (r|_{\operatorname{Im} \widetilde{c}})^{-1} \circ \widetilde{c}.$$

Să considerăm acum că

$$P_0 = r(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

este un punct arbitrar pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Definiţia 6.2.4 *Un vector liber* $w \in V_3$ *se numeşte* ***vector tangent la suprafaţa parametrizată*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$ ***în punctul*** $P_0 = r(u_0, v_0)$ *dacă există o curbă pe* Σ *definită prin*

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3, \; \widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t)),$$

unde $\varepsilon > 0$, *astfel încât*

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = w.$$

Teorema 6.2.5 *Un vector liber* $w \in V_3$ *este un vector tangent în punctul* $P_0 = r(u_0, v_0)$ *la suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *dacă şi numai dacă el poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectorii liberi nenuli necoliniari*

$$r_u(P_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

şi

$$r_v(P_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Demonstraţie. Fie $w \in V_3$ un vector tangent în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ şi fie o curbă pe Σ definită prin

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3, \; \widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t)),$$

unde $\varepsilon > 0$, astfel încât

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = w.$$

Atunci, conform regulii de derivare a funcţiilor compuse aplicată curbei $\widetilde{c}(t)$ şi punctului $t = 0$, obţinem

$$w = \dot{\widetilde{c}}(0) = u'(0) \cdot r_u(P_0) + v'(0) \cdot r_v(P_0).$$

Reciproc, să presupunem că avem un vector liber $w \in V_3$ de forma

$$w = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0),$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, şi să luăm curba pe Σ definită prin

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = r(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2),$$

unde $\varepsilon > 0$ este ales astfel încât

$$(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2) \in D,\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Este evident că avem

$$\widetilde{c}(0) = r(u_0, v_0) = P_0 \text{ şi } \dot{\widetilde{c}}(0) = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0) = w,$$

adică vectorul liber de forma

$$w = c_1 \cdot r_u(P_0) + c_2 \cdot r_v(P_0)$$

este un vector tangent în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. ∎

Definiţia 6.2.6 *Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ se numeşte* ***planul tangent în punctul*** P_0 ***la suprafaţa*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$ *şi este notat cu $T_{P_0}\Sigma$.*

Din teorema precedentă deducem că, din punct de vedere geometric, planul tangent $T_{P_0}\Sigma$ poate fi privit ca planul determinat de punctul

$$P_0 = r(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

şi vectorii liberi nenuli necoliniari $r_u(P_0)$ şi $r_v(P_0)$. În consecinţă, avem următorul rezultat:

Corolarul 6.2.7 *Ecuaţia planului tangent $T_{P_0}\Sigma$ în punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este dată de*

$$T_{P_0}\Sigma : \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 6.2.8 *Dreapta $N_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0 = r(u_0, v_0)$ şi care este perpendiculară pe planul tangent $T_{P_0}\Sigma$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ în punctul P_0.*

Deoarece direcţia dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ este dată de vectorul liber

$$\begin{aligned} r_u(P_0) \times r_v(P_0) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = \\ &= N_1(u_0, v_0)\bar{i} + N_2(u_0, v_0)\bar{j} + N_3(u_0, v_0)\bar{k}, \end{aligned}$$

unde

$$N_1(u_0,v_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix},$$

$$N_2(u_0,v_0)=-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

şi

$$N_3(u_0,v_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix},$$

găsim imediat următorul rezultat:

Corolarul 6.2.9 *Ecuaţiile dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ în punctul $P_0=r(u_0,v_0)$ la suprafaţa $\Sigma=\operatorname{Im} r$ sunt descrise de*

$$N_{P_0}\Sigma:\frac{x-x(u_0,v_0)}{N_1(u_0,v_0)}=\frac{y-y(u_0,v_0)}{N_2(u_0,v_0)}=\frac{z-z(u_0,v_0)}{N_3(u_0,v_0)}.$$

Exemplul 6.2.10 *Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi a dreptei normale în punctul*

$$P_0\left(u_0=\frac{\pi}{4},v_0=\frac{\pi}{4}\right)$$

la sfera $\Sigma=\operatorname{Im} r$, unde aplicaţia

$$r:(0,\pi)\times(0,\pi)\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

este definită prin

$$r(u,v)=(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\cos v).$$

Este evident că avem

$$P_0=r(u_0,v_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Prin derivări parţiale, obţinem

$$r_u=(-\sin u\sin v,\cos u\sin v,0)\ \textit{şi}\ r_v=(\cos u\cos v,\sin u\cos v,-\sin v).$$

Calculând entităţile anterioare în punctul P_0, găsim

$$r_u(P_0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\ \textit{şi}\ r_v(P_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Produsul vectorial al vectorilor $r_u(P_0)$ şi $r_v(P_0)$ este

$$r_u(P_0)\times r_v(P_0)=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\bar{i}-\frac{\sqrt{2}}{4}\bar{j}-\frac{1}{2}\bar{k}.$$

În concluzie, ecuaţiile căutate sunt:

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - \dfrac{1}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{y - \dfrac{1}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{z - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{1}{2}}$$

şi

$$T_{P_0}\Sigma : \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

6.2.2 Suprafețe definite implicit

Să considerăm că $\Sigma : f(x, y, z) = 0$, unde

$$grad(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) \neq (0, 0, 0),\ \forall\ P \in \Sigma,$$

este o suprafaţă definită implicit şi să considerăm că $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar fixat al suprafeţei Σ (i.e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$). Fie

$$\widetilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \widetilde{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

o curbă arbitrară pe Σ cu proprietatea că

$$\widetilde{c}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = P_0(x_0, y_0, z_0).$$

Deoarece curba $\widetilde{c}$ este o curbă pe Σ, rezultă că avem

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0,\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Derivând ultima egalitate în raport cu t şi calculând totul în punctul $t = 0$, deducem că avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x'(0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y'(0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \cdot (z'(0)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\langle grad(f)(P_0), \dot{\widetilde{c}}(0)\right\rangle = 0,$$

adică vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe vectorul $\dot{\widetilde{c}}(0)$ care este tangent la suprafaţa Σ în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0) = \widetilde{c}(0)$. Deoarece curba $\widetilde{c}$ este o curbă arbitrară pe Σ, rezultă că vectorul gradient $grad(f)(P_0)$ este perpendicular pe planul tangent $T_{P_0}\Sigma$. În acest context, introducem următoarele concepte geometrice:

Definiţia 6.2.3 *Vectorul liber nenul*

$$grad(f)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\right)$$

se numeşte ***vectorul normal*** *la suprafaţa Σ în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$.*

Definiţia 6.2.4 *Dreapta $N_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care este direcţionată de vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***dreapta normală*** *la suprafaţa Σ în punctul P_0.*

Definiţia 6.2.5 *Planul $T_{P_0}\Sigma$ care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care este perpendicular pe vectorul normal $grad(f)(P_0)$ se numeşte* ***planul tangent*** *la suprafaţa implicită Σ în punctul P_0.*

Din geometria analitică în spaţiu rezultă imediat următorul rezultat:

Teorema 6.2.6 *Ecuaţiile planului tangent $T_{P_0}\Sigma$ şi a dreptei normale $N_{P_0}\Sigma$ sunt descrise de formulele*

$$T_{P_0}\Sigma : (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + (z - z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$$

şi

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)}.$$

Exemplul 6.2.7 *Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi a dreptei normale în punctul $P_0\,(1, 1, 1)$ la* ***suprafaţa lui Ţiţeica***

$$\Sigma : xyz - 1 = 0.$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

unde

$$f(x, y, z) = xyz - 1.$$

Calculând aceste derivate parţiale în punctul P_0, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 1 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 1.$$

În concluzie, găsim ecuaţiile

$$T_{P_0}\Sigma : (x - 1) \cdot 1 + (y - 1) \cdot 1 + (z - 1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow T_{P_0}\Sigma : x + y + z - 3 = 0$$

şi

$$N_{P_0}\Sigma : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1} \Leftrightarrow N_{P_0}\Sigma : x = y = z.$$

6.3 Formele fundamentale ale unei suprafețe

Vom introduce în continuare două concepte geometrice fundamentale în studiul local sau global al formei unei suprafeţe. Pentru aceasta să considerăm că $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

este o suprafaţă parametrizată simplă. În acest context, reamintim că vectorii liberi nenuli necoliniari

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ şi } r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

formează o bază (neortonormată!) în planul tangent $T_P\Sigma$, unde $P = r(u,v)$. Astfel, planul tangent $T_P\Sigma$ este privit ca un subspaţiu vectorial în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Definiţia 6.3.1 *Funcţia matriceală $g : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ definită prin*

$$P = r(u,v) \in \Sigma \to g_P \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

unde

$$E = \langle r_u, r_u \rangle\,,\ F = \langle r_u, r_v \rangle \ \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle\,,$$

*se numeşte **prima formă fundamentală** a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Observaţia 6.3.2 *Deoarece avem adevărată relaţia*

$$0 < ||r_u \times r_v||^2 = ||r_u||^2 ||r_v||^2 - \langle r_u, r_v \rangle^2 = EG - F^2 = \det g,$$

deducem că prima formă fundamentală a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este inversabilă. Subliniem faptul că, în acest context, noţiunea de inversă nu se referă la inversa funcţiei matriceale g ci la faptul că matricile g_P admit o inversă g_P^{-1} pentru orice punct P al suprafeţei Σ. Astfel, inversa primei forme fundamentale a suprafeţei Σ este definită de funcţia matriceală

$$g^{-1} : \Sigma \to M_2(\mathbb{R}),\ g_P^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Exemplul 6.3.3 *Să se calculeze prima formă fundamentală g (şi inversa acesteia g^{-1}) pentru suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde*

$$r : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u + v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 1) \text{ şi } r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 2,\ F = \langle r_u, r_v \rangle = 1 \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 + 1,$$

adică prima formă fundamentală a suprafeţei Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & u^2+1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 2u^2 + 1 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a suprafeţei Σ *este*

$$g^{-1} = \frac{1}{2u^2+1} \cdot \begin{pmatrix} u^2+1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 6.3.4 *Aria suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *unde*

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

este definită de formula

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{\det g} \cdot dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \cdot dudv.$$

Exemplul 6.3.5 *Să calculăm aria sferei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde aplicaţia*

$$r : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

este definită prin

$$r(u, v) = (R\cos u \cos v, R\cos u \sin v, R\sin u), \quad R > 0.$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (-R\sin u \cos v, -R\sin u \sin v, R\cos u)$$

şi

$$r_v = (-R\cos u \sin v, R\cos u \cos v, 0).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = R^2, \ F = \langle r_u, r_v \rangle = 0 \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle = R^2 \cos^2 u,$$

adică prima formă fundamentală a sferei Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Aria sferei Σ *este*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \int\limits_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi]} \int \sqrt{\det g} \cdot dudv = \int\limits_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi]} \int \left(R^2 \cos u\right) dudv = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \left(R^2\cos u\right) dv\right] du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(vR^2\cos u\right)\Big|_{v=0}^{v=2\pi}\right] du = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\pi R^2 \cos u\right) du = 2\pi R^2 \sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Definiţia 6.3.6 *Funcţia vectorială* $U : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ *definită prin*

$$P = r(u, v) \in \Sigma \to U_P \stackrel{def}{=} \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v]$$

*se numeşte **versorul normal** la suprafaţa* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Observaţia 6.3.7 *Folosind definiţia produsului vectorial a doi vectori liberi, deducem că versorul normal* U_P *este perpendicular pe planul tangent* $T_P\Sigma$, *unde* $P = r(u, v)$. *Prin urmare, sistemul de vectori*

$$B_P = \{r_u, r_v, U_P\}$$

formează o bază mobilă (neortonormată!) în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Pentru a introduce cel de-al doilea concept geometric care ne interesează, vom folosi notaţiile:

$$r_{uu} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right), \quad r_{uv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right)$$

şi

$$r_{vv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Definiţia 6.3.8 *Funcţia matriceală* $b : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ *definită prin*

$$P = r(u, v) \in \Sigma \to b_P \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix},$$

unde

$$l = \langle r_{uu}, U \rangle, \ m = \langle r_{uv}, U \rangle \text{ şi } n = \langle r_{vv}, U \rangle,$$

*se numeşte **a doua formă fundamentală** a suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Exemplul 6.3.9 *Să se calculeze a doua formă fundamentală a suprafeţei parametrizate* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + v).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 1) \text{ şi } r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0, 0, 0), \ r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \text{ şi } r_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} \equiv (\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{2u^2 + 1}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei Σ *este*

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{2u^2+1}} \cdot (\sin v - u\cos v, -\cos v - u\sin v, u).$$

În concluzie, coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U\rangle = 0, \ m = \langle r_{uv}, U\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}$$

şi

$$n = \langle r_{vv}, U\rangle = \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ *este*

$$b = \frac{1}{\sqrt{2u^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & u^2 \end{pmatrix}.$$

6.4 Aplicația lui Weingarten. Curburile unei suprafețe

În această secţiune vom introduce nişte concepte matematice (*aplicaţia lui Weingarten*, *curbura totală*, *curbura medie* şi *curburile principale*) care permit efectiv descrierea locală sau globală a formei suprafeţei parametrizate $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Definiţia 6.4.1 *Funcţia matriceală* $L : \Sigma \to M_2(\mathbb{R})$ *definită prin*

$$P = r(u,v) \in \Sigma \to L_P \overset{def}{=} (g^{-1} \cdot b)_P = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} lG - mF & mG - nF \\ mE - lF & nE - mF \end{pmatrix}$$

se numeşte ***aplicaţia Weingarten*** *a suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Observaţia 6.4.2 *Termenul de "aplicaţie" utilizat în definiţia anterioară este folosit deoarece matricea* L_P *poate fi privită ca matricea în baza* $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ *a unui endomorfism* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ *numit tot* ***aplicaţia Weingarten****. Cu alte cuvinte, din definiţia matricii unui endomorfism într-o anumită bază rezultă că aplicaţia Weingarten* L_P *este definită pe baza* $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ *după cum urmează:*

$$L_P(r_u) = \frac{1}{EG - F^2} \cdot [(lG - mF) \cdot r_u + (mE - lF) \cdot r_v]$$

şi

$$L_P(r_v) = \frac{1}{EG - F^2} \cdot [(mG - nF) \cdot r_u + (nE - mF) \cdot r_v].$$

Prin urmare, dacă $w = c_1 \cdot r_u + c_2 \cdot r_v$*, unde* $c_{1,2} \in \mathbb{R}$*, este un vector oarecare din planul tangent* $T_P\Sigma$*, atunci din liniaritatea aplicaţiei Weingarten* L_P *deducem că avem*

$$L_P(w) = c_1 \cdot L_P(r_u) + c_2 \cdot L_P(r_v).$$

Teorema 6.4.3 *Dacă* $U = \dfrac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v]$ *este versorul normal la suprafaţa parametrizată* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *atunci următoarele formule sunt adevărate:*

$$L(r_u) = -\frac{\partial U}{\partial u} \text{ şi } L(r_v) = -\frac{\partial U}{\partial v}.$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar prima egalitate cerută în teoremă deoarece cea de-a doua se demonstrează în mod absolut analog.

Derivând parţial în raport cu u egalitatea $\langle U, U \rangle = 1$, deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, U \right\rangle = 0,$$

adică vectorul $\partial U / \partial u$ este tangent în punctul $P = r(u, v)$ la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. Atunci, există α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \alpha \cdot r_u + \beta \cdot r_v.$$

Efectuând în această egalitate produsul scalar, pe rând, cu r_u şi r_v, găsim sistemul Cramer

$$\begin{cases} \alpha \cdot E + \beta \cdot F = \left\langle \dfrac{\partial U}{\partial u}, r_u \right\rangle \\ \alpha \cdot F + \beta \cdot G = \left\langle \dfrac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle. \end{cases}$$

Pe de altă parte, derivând parţial în raport cu u egalităţile

$$\langle U, r_u \rangle = \langle U, r_v \rangle = 0,$$

deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_u \right\rangle = -\langle U, r_{uu} \rangle = -l \text{ şi } \left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle = -\langle U, r_{uv} \rangle = -m,$$

adică sistemul Cramer anterior devine

$$\begin{cases} \alpha \cdot E + \beta \cdot F = -l \\ \alpha \cdot F + \beta \cdot G = -m. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem Cramer este

$$\alpha = -\frac{lG - mF}{EG - F^2} \text{ şi } \beta = -\frac{mE - lF}{EG - F^2},$$

adică

$$\frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{lG - mF}{EG - F^2} \cdot r_u - \frac{mE - lF}{EG - F^2} \cdot r_v = -L(r_u).$$

■

Observaţia 6.4.4 *Teorema precedentă ne arată că aplicaţia Weingarten* L_P *conţine toate informaţiile legate de variaţia locală pe suprafaţa* Σ *a versorului normal* U_P. *Deoarece versorul normal* U_P *este perpendicular pe planul tangent* $T_P\Sigma$ *rezultă că aplicaţia Weingarten* L_P *conţine toate informaţiile legate de variaţia locală pe suprafaţa* Σ *a planului tangent* $T_P\Sigma$. *Prin urmare, deoarece într-o vecinătate suficient de mică a punctului* $P \in \Sigma$ *putem aproxima suprafaţa* Σ *cu planul tangent* $T_P\Sigma$, *deducem că aplicaţia Weingarten* L_P *conţine toate informaţiile legate de forma suprafeţei* Σ *în vecinătatea punctului* P.

Exemplul 6.4.5 *Să se calculeze aplicaţia Weingarten pentru* ***suprafaţa lui Ţiţeica*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(u,v) \mid u \cdot v = 0\} \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (u, v, u^{-1}v^{-1}).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, -u^{-2}v^{-1}) \text{ şi } r_v = (0, 1, -u^{-1}v^{-2}).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0, 0, 2u^{-3}v^{-1}),\ r_{uv} = (0, 0, u^{-2}v^{-2}) \text{ şi } r_{vv} = (0, 0, 2u^{-1}v^{-3}).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + u^{-4}v^{-2},\ F = \langle r_u, r_v \rangle = u^{-3}v^{-3}$$

şi

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + u^{-2}v^{-4},$$

adică prima formă fundamentală a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$g = \begin{pmatrix} 1 + u^{-4}v^{-2} & u^{-3}v^{-3} \\ u^{-3}v^{-3} & 1 + u^{-2}v^{-4} \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2} > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$g^{-1} = \frac{1}{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + u^{-2}v^{-4} & -u^{-3}v^{-3} \\ -u^{-3}v^{-3} & 1 + u^{-4}v^{-2} \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -u^{-2}v^{-1} \\ 0 & 1 & -u^{-1}v^{-2} \end{vmatrix} \equiv (u^{-2}v^{-1}, u^{-1}v^{-2}, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei lui Ţiţeica este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}}} \cdot (u^{-2}v^{-1}, u^{-1}v^{-2}, 1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U \rangle = \frac{2u^{-3}v^{-1}}{\sqrt{1 + u^{-2}v^{-4} + u^{-4}v^{-2}}},$$

$$m = \langle r_{uv}, U\rangle = \frac{u^{-2}v^{-2}}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}}$$

şi

$$n = \langle r_{vv}, U\rangle = \frac{2u^{-1}v^{-3}}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+u^{-2}v^{-4}+u^{-4}v^{-2}}}\cdot\begin{pmatrix} 2u^{-3}v^{-1} & u^{-2}v^{-2} \\ u^{-2}v^{-2} & 2u^{-1}v^{-3}\end{pmatrix}.$$

În concluzie, aplicaţia Weingarten a suprafeţei lui Ţiţeica este

$$L = g^{-1}b = \frac{1}{[\det g]^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix} 2u^{-3}v^{-1}+u^{-5}v^{-5} & u^{-2}v^{-2}-u^{-4}v^{-6} \\ u^{-2}v^{-2}-u^{-6}v^{-4} & 2u^{-1}v^{-3}+u^{-5}v^{-5}\end{pmatrix}.$$

Definiţia 6.4.6 *Funcţia scalară $K:\Sigma\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$P = r(u,v)\in\Sigma \to K(P) \stackrel{def}{=} [\det L]\,(P) = \frac{ln-m^2}{EG-F^2}$$

se numeşte ***curbura totală*** *sau* ***curbura Gauss*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Observaţia 6.4.7 *Deoarece avem*

$$\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B),$$

rezultă că avem

$$K = \det L = \det(g^{-1}\cdot b) = \frac{\det b}{\det g}.$$

Definiţia 6.4.8 *Dacă*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$

este o matrice arbitrară, atunci numărul real

$$\operatorname{Trace}(A) = a+d$$

se numeşte ***urma*** *matricii A.*

Definiţia 6.4.9 *Funcţia scalară $H:\Sigma\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$P = r(u,v)\in\Sigma \to H(P) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\cdot[\operatorname{Trace}(L)](P) = \frac{1}{2}\cdot\frac{lG-2mF+nE}{EG-F^2}$$

se numeşte ***curbura medie*** *a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Teorema 6.4.10 *Următoarea inegalitate este întotdeauna adevărată:*

$$\left[H^2-K\right](P)\geq 0,\ \forall\ P\in\Sigma.$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra inegalitatea din teoremă, vom demonstra întâi că pentru orice punct $P = r(u,v) \in \Sigma$ fixat, aplicaţia Weingarten

$$L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$$

este un endomorfism simetric, adică

$$\langle L_P(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, L_P(w_2)\rangle\,,\ \forall\ w_1, w_2 \in T_P\Sigma.$$

Fie doi vectori tangenţi arbitrari

$$w_1 = a \cdot r_u + b \cdot r_v \text{ şi } w_2 = \alpha \cdot r_u + \beta \cdot r_v,$$

unde $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci, folosind liniaritatea aplicaţiei Weingarten şi a produsului scalar, deducem că

$$\begin{aligned}\langle L_P(w_1), w_2\rangle &= a\alpha\langle L_P(r_u), r_u\rangle + b\beta\langle L_P(r_v), r_v\rangle + \\ &\quad + a\beta\langle L_P(r_u), r_v\rangle + b\alpha\langle L_P(r_v), r_u\rangle\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\langle w_1, L_P(w_2)\rangle &= a\alpha\langle r_u, L_P(r_u)\rangle + b\beta\langle r_v, L_P(r_v)\rangle + \\ &\quad + a\beta\langle r_u, L_P(r_v)\rangle + b\alpha\langle r_v, L_P(r_u)\rangle\,.\end{aligned}$$

Simetria produsului scalar ne conduce la relaţia

$$\begin{aligned}\langle L_P(w_1), w_2\rangle - \langle w_1, L_P(w_2)\rangle &= a\beta\left[\langle L_P(r_u), r_v\rangle - \langle r_u, L_P(r_v)\rangle\right] + \\ &\quad + b\alpha\left[\langle L_P(r_v), r_u\rangle - \langle r_v, L_P(r_u)\rangle\right].\end{aligned}$$

În consecinţă, pentru a demonstra că aplicaţia Weingarten L_P este un endomorfism simetric, este suficient să demonstrăm că

$$\langle L_P(r_u), r_v\rangle = \langle r_u, L_P(r_v)\rangle \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v\right\rangle = \left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle,$$

unde U este versorul normal la suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$. Derivând parţial în raport cu u egalitatea $\langle U, r_v\rangle = 0$ şi în raport cu v egalitatea $\langle U, r_u\rangle = 0$, deducem că

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial u}, r_v\right\rangle = -\langle U, r_{vu}\rangle = -m$$

şi

$$\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle = -\langle r_{uv}, U\rangle = -m,$$

unde am ţinut cont de teorema lui Schwartz, şi anume $r_{uv} = r_{vu}$.

În consecinţă, aplicaţia Weingarten L_P este un endomorfism simetric pentru orice punct $P \in \Sigma$.

Deoarece orice endomorfism simetric este diagonalizabil, rezultă că aplicaţia lui Weingarten L_P este diagonalizabilă pentru orice punct $P \in \Sigma$. Prin urmare, matricea L_P are două valori proprii reale, care sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\det\left[L_P - \lambda \cdot I_2\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2H(P)\cdot\lambda + K(P) = 0,$$

unde I_2 este matricea unitate. În concluzie, discriminantul acestei ecuaţii de grad doi este pozitiv, adică avem

$$[H(P)]^2 - K(P) \geq 0,\ \forall\ P \in \Sigma.$$

■

Observaţia 6.4.11 *Deşi aplicaţia Weingarten* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$, *unde* $P = r(u, v) \in \Sigma$, *este un endomorfism simetric, matricea* $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$ *nu este neapărat o matrice simetrică. Acest fapt apare din cauză că matricea* $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$ *este matricea în baza* ***neortonormată*** $\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$ *a endomorfismului* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$.

Definiţia 6.4.12 *Funcţiile scalare* $k_{1,2} : \Sigma \to \mathbb{R}$ *definite prin*

$$P = r(u, v) \in \Sigma \to k_{1,2}(P) \stackrel{def}{=} \left[H \pm \sqrt{H^2 - K}\right](P)$$

se numesc ***curburile principale*** *ale suprafeţei* $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Observaţia 6.4.13 *Din definiţiile curburilor principale rezultă imediat că următoarele egalităţi sunt adevărate:*

$$K(P) = [k_1 \cdot k_2](P), \ \forall \ P \in \Sigma,$$

şi

$$H(P) = \left[\frac{k_1 + k_2}{2}\right](P), \ \forall \ P \in \Sigma.$$

Observaţia 6.4.14 *Este evident că curburile principale* $k_1(P)$ *şi* $k_2(P)$ *sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice*

$$k^2 - 2H(P)k + K(P) = 0 \Leftrightarrow \det[L_P - k \cdot I_2] = 0.$$

Cu alte cuvinte, curburile principale $k_1(P)$ *şi* $k_2(P)$ *sunt valorile proprii ale aplicaţiei Weingarten* $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ *a cărei matrice în baza* ***neortonormată***

$$\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$$

este matricea (nu neapărat simetrică!) $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$.

Exemplul 6.4.15 *Să se calculeze curbura totală, curbura medie şi curburile principale ale paraboloidului hiperbolic* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (u, v, uv).$$

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, v) \text{ şi } r_v = (0, 1, u).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0, 0, 0), \ r_{uv} = (0, 0, 1) \text{ şi } r_{vv} = (0, 0, 0).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + v^2, \ F = \langle r_u, r_v \rangle = uv \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + u^2,$$

adică prima formă fundamentală a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$g = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^2 + v^2 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$g^{-1} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} \equiv (-v, -u, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1+u^2+v^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \cdot (-v, -u, 1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U\rangle = 0,\ m = \langle r_{uv}, U\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \text{ şi } n = \langle r_{vv}, U\rangle = 0,$$

adică a doua formă fundamentală a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia Weingarten a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$L = g^{-1}b = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix}.$$

Curbura totală (Gauss) a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$K = \det L = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Curbura medie a paraboloidului hiperbolic Σ *este*

$$H = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Trace}(L) = -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}.$$

În concluzie, curburile principale ale paraboloidului hiperbolic Σ *sunt*

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} = \frac{-uv \pm \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}.$$

Definiţia 6.4.16 *Orice versor $w \in T_P\Sigma$ cu proprietatea*

$$L_P(w) = k_1(P) \cdot w \text{ sau } L_P(w) = k_2(P) \cdot w$$

se numeşte ***versor principal*** *al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ în punctul $P \in \Sigma$. Direcţia unui versor principal se numeşte* ***direcţie principală*** *a suprafeţei parametrizate $\Sigma = \operatorname{Im} r$ în punctul $P = r(u, v)$.*

Observaţia 6.4.17 *Deoarece aplicaţia Weingarten $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ este diagonalizabilă, rezultă că există o bază* ***ortonormată*** *(formată din versori proprii ortogonali)*

$$\{e_1, e_2\} \subset T_P\Sigma$$

astfel încât

$$L_P(e_1) = k_1(P) \cdot e_1 \text{ şi } L_P(e_2) = k_2(P) \cdot e_2.$$

Cu alte cuvinte, în orice punct $P \in \Sigma$ există cel puţin două direcţii principale distincte, care sunt perpendiculare. Dacă $k_1(P) \neq k_2(P)$, atunci există două şi numai două direcţii principale distincte, care sunt perpendiculare.

Observaţia 6.4.18 *Sistemul de vectori*

$$\widetilde{B}_P = \{e_1, e_2, U_P\}$$

formează o bază mobilă (ortonormată!) în spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$.

Definiţia 6.4.19 *Un punct $P \in \Sigma$ cu proprietatea*

$$k_1(P) = k_2(P) = k \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***punct ombilical*** *al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$.*

Observaţia 6.4.20 *Un punct $P \in \Sigma$ este un punct ombilical al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ dacă şi numai dacă*

$$\left[H^2 - K\right](P) = 0.$$

Teorema 6.4.21 *Un punct $P \in \Sigma$ este punct ombilical al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ dacă şi numai dacă*

$$L_P(w) = k \cdot w,\ \forall\ w \in T_P\Sigma.$$

Demonstraţie. " $\Leftarrow$ " Să presupunem că

$$L_P(w) = k \cdot w,\ \forall\ w \in T_P\Sigma.$$

Atunci, matricea aplicaţiei Weingarten în baza neortonormată

$$\{r_u, r_v\} \subset T_P\Sigma$$

este evident $L_P = k \cdot I_2$. Valorile proprii ale acestei matrici sunt evident

$$k_1(P) = k_2(P) = k.$$

" $\Rightarrow$ " Să presupunem că $P \in \Sigma$ este punct ombilical al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, adică

$$k_1(P) = k_2(P) = k.$$

Deoarece aplicaţia lui Weingarten $L_P : T_P\Sigma \to T_P\Sigma$ este diagonalizabilă iar curburile principale $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt valorile proprii ale aplicaţiei Weingarten, rezultă că există o bază ortonormată

$$\{e_1, e_2\} \subset T_P\Sigma$$

astfel încât

$$L_P(e_1) = k \cdot e_1 \text{ şi } L_P(e_2) = k \cdot e_2,$$

Să considerăm acum că $w \in T_P\Sigma$ un vector tangent arbitrar. Atunci, există unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$w = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2.$$

Prin urmare, avem

$$L_P(w) = \alpha \cdot L_P(e_1) + \beta \cdot L_P(e_2) = \alpha \cdot k \cdot e_1 + \beta \cdot k \cdot e_2 = k \cdot w.$$

■

Observaţia 6.4.22 *Dacă $P \in \Sigma$ este un punct ombilical al suprafeţei Σ, atunci orice versor $w \in T_P\Sigma$ este un versor principal al suprafeţei Σ în punctul P. Prin urmare, orice direcţie este o direcţie principală a suprafeţei Σ în punctul ombilical P.*

Corolarul 6.4.23 *Un punct $P \in \Sigma$ este punct ombilical al suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ dacă şi numai dacă*

$$L_P = k \cdot I_2 \Leftrightarrow b_P = k \cdot g_P.$$

Demonstraţie. Corolarul este o consecinţă imediată a teoremei precedente şi a faptului că $L_P = g_P^{-1} \cdot b_P$. ■

Exemplul 6.4.24 *Să considerăm sfera centrată în originea $O(0,0,0)$ şi de rază $R > 0$, definită prin $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde*

$$r : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v).$$

Să se arate că toate punctele sferei Σ sunt puncte ombilicale.

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0)$$

şi

$$r_v = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, 0), \ r_{uv} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0)$$

şi

$$r_{vv} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, -R \cos v).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = R^2 \sin^2 v, \;\; F = \langle r_u, r_v \rangle = 0 \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle = R^2,$$

adică prima formă fundamentală a sferei Σ *este*

$$g = R^2 \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u *şi* r_v *este*

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v & -R \sin v \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv -R^2 \sin v \left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v \right) \end{aligned}$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = R^2 \sin v.$$

Prin urmare, versorul normal al sferei Σ *este*

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = -\left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v \right).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U \rangle = R \sin^2 v, \;\; m = \langle r_{uv}, U \rangle = 0 \text{ şi } n = \langle r_{vv}, U \rangle = R,$$

adică a doua formă fundamentală a sferei Σ *este*

$$b = R \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \cdot g.$$

Aplicaţia Weingarten a sferei Σ *este*

$$L = g^{-1} b = g^{-1} \cdot \frac{1}{R} \cdot g = \frac{1}{R} \cdot I_2 = \frac{1}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Curbura totală (Gauss) a sferei Σ *este*

$$K = \det L = \frac{1}{R^2}.$$

Curbura medie a sferei Σ *este*

$$H = \frac{1}{2} \cdot \text{Trace}(L) = \frac{1}{R}.$$

Curburile principale ale sferei Σ *sunt*

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

În concluzie, toate punctele sferei Σ *sunt puncte ombilicale.*

Observaţia 6.4.25 *Se poate demonstra că într-un punct ombilical P al unei suprafeţe Σ suprafaţa Σ se încovoaie la fel de tare şi în acelaşi sens pe toate direcţiile. Astfel, prin faptul că toate punctele unei sfere sunt puncte ombilicale se explică "rotunjimea" sferelor.*

Definiţia 6.4.26 *O suprafaţă Σ pentru care $H \equiv 0$ se numeşte* ***suprafaţă minimală****.*

Observaţia 6.4.27 *Din punct de vedere geometric, se poate demonstra că dintre toate suprafeţele care trec printr-o curbă închisă, suprafaţa de arie minimă este o suprafaţă minimală. Demonstraţia acestei afirmaţii depăşeşte însă cadrul şi scopul acestei cărţi.*

Exemplul 6.4.28 *Să se arate că* ***elicoidul drept*** $\Sigma = \operatorname{Im} r$, *unde*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

este o suprafaţă minimală.

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0) \text{ şi } r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,0), \ r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \text{ şi } r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sunt

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = 1, \ F = \langle r_u, r_v \rangle = 0 \text{ şi } G = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + u^2,$$

adică prima formă fundamentală a elicoidului drept Σ este

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul primei forme fundamentale este

$$\det g = 1 + u^2 > 0,$$

rezultă că inversa primei forme fundamentale a elicoidului drept Σ este

$$g^{-1} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} \equiv (\sin v, -\cos v, u)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1+u^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al elicoidului drept Σ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot (\sin v, -\cos v, u).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U\rangle = 0,\ m = \langle r_{uv}, U\rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ \text{şi}\ n = \langle r_{vv}, U\rangle = 0,$$

adică a doua formă fundamentală a elicoidului drept Σ *este*

$$b = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia Weingarten a elicoidului drept Σ *este*

$$L = g^{-1}b = -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+u^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Curbura medie a elicoidului drept Σ *este*

$$H = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Trace}(L) \equiv 0.$$

În concluzie, elicoidul drept Σ *este o suprafaţă minimală.*

6.5 Interpretări geometrice ale curburilor unei suprafețe

Să considerăm că $\Sigma \subset E_3$ este o suprafaţă şi că $P \in \Sigma$ este un punct arbitrar fixat al suprafeţei.

Teorema 6.5.1 *Într-o vecinătate suficient de mică a punctului* $P \in \Sigma$, *suprafaţa* Σ *are aproximativ aceeaşi formă cu forma cuadricei*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot \left[k_1(P) \cdot x^2 + k_2(P) \cdot y^2\right]$$

într-o vecinătate suficient de mică a originii $O(0,0,0) \in \Sigma'$, *unde* $k_1(P)$ *şi* $k_2(P)$ *sunt curburile principale ale suprafeţei* Σ *în punctul* P.

Demonstraţie. Efectuând eventual o translaţie şi o rotaţie în spaţiu, putem presupune fără a restrânge generalitatea că:

1. $P = O(0,0,0)$;
2. $U_P = (0,0,1) \equiv \overline{k} \subset Oz$ este versorul normal în P la suprafaţa Σ.
3. $e_1 = (1,0,0) \equiv \overline{i} \subset Ox$ şi $e_2 = (0,1,0) \equiv \overline{j} \subset Oy$ sunt doi versori proprii ortogonali ai suprafeţei Σ în punctul P.

Mai mult, cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite, putem presupune că, într-o vecinătate suficient de mică a punctului $P \in \Sigma$, suprafaţa Σ este parametrizată sub forma

$$\Sigma = \operatorname{Im} r,\ r(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)),$$

unde

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

este o funcţie diferenţiabilă.

Este evident că din (1) rezultă $\varphi(0,0) = 0$.

Prin derivări parţiale, obţinem

$$r_u(P) = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)\right) \text{ şi } r_v(P) = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0)\right).$$

Produsul vectorial al vectorilor $r_u(P)$ şi $r_v(P)$ este

$$r_u(P) \times r_v(P) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) \end{vmatrix} \equiv \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0), -\frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0), 1\right).$$

Deoarece produsul vectorial $r_u(P) \times r_v(P)$ este coliniar cu versorul normal U_P, din presupunerea (2) deducem că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Aceste relaţii, împreună cu presupunerea (3), implică

$$r_u(P) = (1,0,0) = e_1 \text{ şi } r_v(P) = (0,1,0) = e_2,$$

adică $r_u(P)$ şi $r_v(P)$ sunt doi versori proprii ortogonali ai suprafeţei Σ în punctul P. Prin urmare, avem

$$L_P(r_u(P)) = k_1(P) \cdot r_u(P) \text{ şi } L_P(r_v(P)) = k_2(P) \cdot r_v(P),$$

unde L_P este aplicaţia Weingarten a suprafeţei Σ în punctul P iar $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt curburile principale ale suprafeţei Σ în punctul P.

Pe de altă parte, în acest context geometric, prima formă fundamentală a suprafeţei Σ în punctul P este

$$g_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce implică $L_P = b_P$, unde b_P este a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ în punctul P. Totodată, prin derivări parţiale succesive, avem

$$r_{uu}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0)\right), \; r_{uv}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0)\right)$$

şi

$$r_{vv}(P) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0)\right),$$

adică găsim

$$L_P = b_P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0) & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Folosind acum definiţia aplicaţiei Weingarten, deducem că

$$\begin{cases} L_P(r_u(P)) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(0,0)\cdot r_u(P) + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(0,0)\cdot r_v(P) = k_1(P)\cdot r_u(P) \\ L_P(r_v(P)) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(0,0)\cdot r_u(P) + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(0,0)\cdot r_v(P) = k_2(P)\cdot r_v(P), \end{cases}$$

ceea ce implică

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(0,0) = k_1(P),\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(0,0) = k_2(P) \text{ şi } \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(0,0) = 0.$$

Deci, în contextul geometric prezentat mai sus, am dedus că funcţia $\varphi(u,v)$ are proprietăţile

$$\varphi(0,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(0,0) = 0$$

şi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(0,0) = k_1(P),\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(0,0) = k_2(P).$$

Atunci, conform formulei lui Taylor aplicată funcţiei $\varphi(u,v)$ şi punctului $(0,0)$, deducem că, pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(0,0)$, putem aproxima funcţia $\varphi(u,v)$ cu funcţia polinomială de grad doi

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \varphi(0,0) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0)\cdot u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0)\cdot v + \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(0,0)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(0,0)\cdot u\cdot v + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(0,0)\cdot v^2\right], \end{aligned}$$

adică, pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(0,0)$, putem aproxima funcţia $\varphi(u,v)$ cu funcţia polinomială de grad doi

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot u^2 + k_2(P)\cdot v^2\right].$$

În concluzie, rezultă ceea ce aveam de demonstrat. ■

Definiţia 6.5.2 *Cuadrica*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot x^2 + k_2(P)\cdot y^2\right]$$

unde $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ sunt curburile principale ale suprafeţei Σ în punctul P, se numeşte ***aproximarea pătratică*** *a suprafeţei Σ într-o vecinătate a punctului $P \in \Sigma$.*

Interpretarea geometrică a semnului curburii Gauss

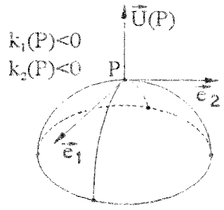
1. Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem curbura Gauss (totală)

$$K(P) = k_1(P)\cdot k_2(P) > 0.$$

Atunci, rezultă că curburile principale $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au acelaşi semn, adică aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este *paraboloidul eliptic*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1(P)\cdot x^2 + k_2(P)\cdot y^2\right].$$

De aceea, local, punctul P apare pe suprafaţa Σ ca un *vârf*.



Paraboloidul eliptic Σ'

Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte eliptice*.

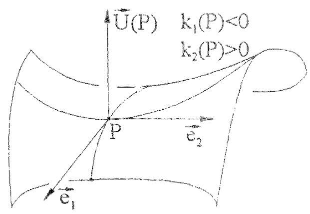
2. Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P) < 0.$$

Atunci, rezultă că curburile principale $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au semne contrare, adică aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este *paraboloidul hiperbolic*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot \left[k_1(P) \cdot x^2 + k_2(P) \cdot y^2\right].$$

De aceea, în vecinătatea punctului P suprafaţa Σ arată ca o *şa*.



Paraboloidul hiperbolic Σ'

Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte hiperbolice*.

3. Să presupunem că în punctul $P \in \Sigma$ avem

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P) = 0$$

şi să considerăm următoarele două cazuri:

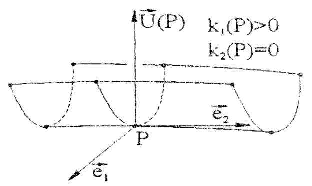
(a) numai una dintre curburile principale este zero, de exemplu

$$k_1(P) \neq 0 \text{ şi } k_2(P) = 0.$$

Atunci, aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este *cilindrul parabolic*

$$\Sigma' : z = \frac{1}{2} \cdot k_1(P) \cdot x^2.$$

De aceea, în vecinătatea punctului P suprafaţa Σ arată ca o *albie*.



Cilindrul parabolic Σ'

Aceste tipuri de puncte se numesc *puncte parabolice.*

(b) ambele curburi principale sunt zero, adică

$$k_1(P) = k_2(P) = 0.$$

Atunci, aproximarea pătratică a suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P este *planul*

$$\Sigma' : z = 0,$$

ceea ce ne conduce la concluzia că nu putem obţine nici o informaţie despre forma suprafeţei Σ în vecinătatea punctului P. Un asemenea punct se numeşte *punct planar* al suprafeţei Σ.

Observaţia 6.5.3 *Un punct $P \in \Sigma$ este un punct planar al suprafeţei Σ dacă şi numai dacă*

$$b_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 6.5.4 *Să se arate că punctul $O(0,0,0)$ este singurul punct planar al suprafeţei*

$$\Sigma : z = x^3 - 3xy^2.$$

Este evident că avem $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2),$$

şi $r(0,0) = O(0,0,0)$.

Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \text{ şi } r_v = (0, 1, -6uv).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (0,0,6u),\ r_{uv} = (0,0,-6v) \text{ şi } r_{vv} = (0,0,-6u).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 3(u^2 - v^2) \\ 0 & 1 & -6uv \end{vmatrix} \equiv (-3(u^2 - v^2), 6uv, 1)$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}.$$

Prin urmare, versorul normal al suprafeţei Σ *este*

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = \frac{1}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}} \cdot (-3(u^2 - v^2), 6uv, 1).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U \rangle = \frac{6u}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}},$$

$$m = \langle r_{uv}, U \rangle = -\frac{6v}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}}$$

şi

$$n = \langle r_{vv}, U \rangle = -\frac{6u}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}},$$

adică a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ *este*

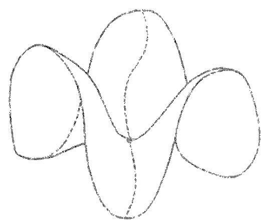
$$b = \frac{6}{\sqrt{1 + 36u^2v^2 + 9(u^2 - v^2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} u & -v \\ -v & -u \end{pmatrix}.$$

În concluzie, singurul punct planar al suprafeţei Σ *este punctul* $O(0,0,0)$*.*

Observaţia 6.5.5 *Punctul planar* $O(0,0,0)$ *al suprafeţei*

$$\Sigma : z = x^3 - 3xy^2$$

este ***punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri****.*



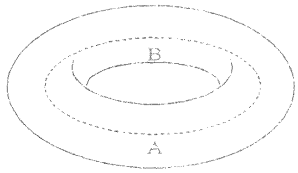
Punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri

Exemplul 6.5.6 *Suprafaţa obţinută prin rotirea în jurul axei* Oz *a unui cerc situat în planul* xOz*, de rază* $\rho > 0$*, şi centrat în punctul* $C_0(R, 0, 0)$*, unde* $R > \rho$*, se numeşte* ***tor circular****. Torul circular este suprafaţa parametrizată* $\mathcal{T} = \operatorname{Im} r$*, unde aplicaţia*

$$r : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$$

este definită prin

$$r(u, v) = ((R + \rho \cos u) \sin v, (R + \rho \cos u) \cos v, \rho \sin u).$$



Torul circular $\mathcal{T}$

Vom studia în continuare care sunt punctele planare ale torului circular $\mathcal{T}$. Prin derivări parţiale obţinem

$$r_u = (-\rho \sin u \sin v, -\rho \sin u \cos v, \rho \cos u)$$

şi

$$r_v = ((R + \rho \cos u) \cos v, -(R + \rho \cos u) \sin v, 0).$$

Derivând în continuare, găsim

$$r_{uu} = (-\rho \cos u \sin v, -\rho \cos u \cos v, -\rho \sin u),$$

$$r_{uv} = (-\rho \sin u \cos v, \rho \sin u \sin v, 0)$$

şi

$$r_{vv} = (-(R + \rho \cos u) \sin v, -(R + \rho \cos u) \cos v, 0).$$

Produsul vectorial al vectorilor r_u şi r_v este

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\rho \sin u \sin v & -\rho \sin u \cos v & \rho \cos u \\ (R + \rho \cos u) \cos v & -(R + \rho \cos u) \sin v & 0 \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv [\rho(R + \rho \cos u)] \cdot (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u) \end{aligned}$$

iar norma acestuia este

$$||r_u \times r_v|| = \rho(R + \rho \cos u).$$

Prin urmare, versorul normal al torului circular $\mathcal{T}$ este

$$U = \frac{1}{||r_u \times r_v||} \cdot [r_u \times r_v] = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u).$$

Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$l = \langle r_{uu}, U \rangle = -\rho, \;\; m = \langle r_{uv}, U \rangle = 0$$

şi

$$n = \langle r_{vv}, U \rangle = -(R + \rho \cos u) \cos u,$$

adică a doua formă fundamentală a torului circular $\mathcal{T}$ este

$$b = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -(R + \rho \cos u) \cos u \end{pmatrix}.$$

În concluzie, torul circular $\mathcal{T}$ nu are nici un punct planar.

6.6 Geodezice pe o suprafață

Fie $\widetilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \Sigma$, $\widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t))$, o curbă pe suprafaţa parametrizată regulată $\Sigma = \operatorname{Im} r$.

Definiţia 6.6.1 *Curba $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$ se numeşte* ***geodezică*** *a suprafeţei Σ dacă pentru fiecare $t \in I$ planul osculator la curbă $\pi^{\text{Osc}}_{(\widetilde{c}(t))}$ conţine versorul normal $U(\widetilde{c}(t))$ al suprafeţei Σ.*

Propoziţia 6.6.2 *Ridicata curbei plane $C : v = v(u)$ pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este o geodezică dacă şi numai dacă funcţia $v = v(u)$ verifică ecuaţia diferenţială*

$$\det\left[r_u + r_v\frac{dv}{du},\ r_{uu} + 2r_{uv}\frac{dv}{du} + r_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + r_v\frac{d^2v}{du^2},\ r_u \times r_v\right] = 0.$$

Demonstraţie. Ridicata curbei plane C pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este curba în spaţiu $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$, unde $\widetilde{c}(u) = r(u, v(u))$. Planul osculator $\pi^{\text{Osc}}_{(\widetilde{c}(u))}$ este determinat de vectorii

$$\dot{\widetilde{c}}(u) = r_u + r_v\frac{dv}{du} \quad \text{şi} \quad \ddot{\widetilde{c}}(u) = r_{uu} + 2r_{uv}\frac{dv}{du} + r_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + r_v\frac{d^2v}{du^2},$$

unde $\dot{\widetilde{c}}(u) = d\widetilde{c}/du$ şi $\ddot{\widetilde{c}}(u) = d^2\widetilde{c}/du^2$. Evident, curba $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$ este o geodezică pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ dacă şi numai dacă vectorii $\dot{\widetilde{c}}(u)$, $\ddot{\widetilde{c}}(u)$ şi $U(u, v(u))$ sunt coplanari. Această condiţie este echivalentă cu

$$\det\left[\dot{\widetilde{c}}(u),\ \ddot{\widetilde{c}}(u),\ (r_u \times r_v)(u, v(u))\right] = 0.$$

■

Fie $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$, $\widetilde{c}(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, o curbă pe suprafaţa parametrizată regulată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, care are capetele fixate $\widetilde{c}(a) = P(u = u_1, v = v_1)$ şi $\widetilde{c}(b) = Q(u = u_2, v = v_2)$.

Teorema 6.6.3 *Dacă curba $\widetilde{C}$ reprezintă drumul cel mai scurt dintre punctele P şi Q pe suprafaţa Σ (i.e. curba $\widetilde{C}$ are lungimea minimă), atunci curba $\widetilde{C}$ este o geodezică pe suprafaţa Σ.*

Demonstraţie. Lungimea curbei $\widetilde{C} = \operatorname{Im}\widetilde{c}$ este dată de formula

$$L(\widetilde{C}) = \int_a^b ||\dot{\widetilde{c}}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}(t), \dot{\widetilde{c}}(t)\right\rangle}dt,$$

unde $\dot{\widetilde{c}}(t) = d\widetilde{c}/dt$.

Să considerăm pe suprafaţa Σ o variaţie locală arbitrară a curbei $\widetilde{C}$, definită de familia de curbe $\left(\widetilde{C}_s\right)_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$, unde $\varepsilon > 0$, cu proprietăţile:

1. $\widetilde{C}_s = \operatorname{Im}\widetilde{c}_s$, $\widetilde{c}_s(t) = r(u_s(t), v_s(t))$, $t \in [a, b]$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;
2. $\widetilde{C}_0 = \widetilde{C}$;
3. $\widetilde{c}_s(a) = P$ şi $\widetilde{c}_s(b) = Q$, $\forall\ s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

În acest context, lungimile curbelor $\widetilde{C}_s$ sunt determinate de funcţia

$$f(s) \stackrel{def}{=} L(\widetilde{C}_s) = \int_a^b \sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s(t), \dot{\widetilde{c}}_s(t) \right\rangle} dt,$$

unde $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}_+$ şi $\dot{\widetilde{c}}_s(t) = d\widetilde{c}_s/dt$. Evident, dacă $\widetilde{C} = \widetilde{C}_0$ este curba care minimizează distanţa dintre P şi Q pe suprafaţa Σ, atunci avem

$$f'(0) = \left. \frac{df}{ds} \right|_{s=0} = 0,$$

adică $s = 0$ este un punct critic al funcţiei f. Derivând funcţia $f(s)$ în raport cu parametrul s, obţinem

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \frac{d}{ds}\left[L(\widetilde{C}_s)\right] = \frac{d}{ds}\left[\int_a^b \sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s(t), \dot{\widetilde{c}}_s(t) \right\rangle} dt\right] = \\
&= \int_a^b \frac{d}{ds}\left[\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s(t), \dot{\widetilde{c}}_s(t) \right\rangle}\right] dt = \int_a^b \frac{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\dot{\widetilde{c}}_s}{ds} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} dt = \\
&= \int_a^b \frac{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds}\right] \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} dt = \int_a^b \frac{\dfrac{d}{dt}\left[\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle\right] - \left\langle \ddot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} dt = \\
&= \int_a^b \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}}\right] + \frac{\left\langle \ddot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle \left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle \sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} - \frac{\left\langle \ddot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} \right\} dt = \\
&= \left. \frac{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} \right|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{\left\langle \left\langle \ddot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle \dot{\widetilde{c}}_s - \left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle \ddot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle \sqrt{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle}} dt = \\
&= 0 - \int_a^b \frac{\left\langle \left(\dot{\widetilde{c}}_s \times \ddot{\widetilde{c}}_s \right) \times \dot{\widetilde{c}}_s, \dfrac{d\widetilde{c}_s}{ds} \right\rangle}{\left\langle \dot{\widetilde{c}}_s, \dot{\widetilde{c}}_s \right\rangle^{3/2}} dt,
\end{aligned}$$

unde, în calcule, am folosit proprietăţile produsului scalar şi formula dublului produs vectorial. Rezultă că avem

$$f'(0) = -\int_a^b \frac{\left\langle \left(\dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t) \right) \times \dot{\widetilde{c}}(t), V(t) \right\rangle}{\left\langle \dot{\widetilde{c}}(t), \dot{\widetilde{c}}(t) \right\rangle^{3/2}} dt,$$

unde vectorul

$$V(t) = \left. \frac{d\widetilde{c}_s}{ds}(t) \right|_{s=0}$$

are proprietatea $V(a) = V(b) = \overline{0}$.

Deoarece variaţia de curbe $\widetilde{C}_s$ este arbitrară (şi deci vectorul $V(t)$ este arbitrar), deducem că avem următoarele echivalenţe:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \left(\dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t)\right) \times \dot{\widetilde{c}}(t) = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t) \text{ este coliniar cu } \dot{\widetilde{c}}(t).$$

Din cauză că vectorul $\dot{\widetilde{c}}(t)$ aparţine planului tangent $T_{\widetilde{c}(t)}\Sigma$, rezultă că vectorul $\dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t)$ este perpendicular pe versorul normal $U(\widetilde{c}(t))$, adică avem

$$\left\langle \dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t), U(\widetilde{c}(t)) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \dot{\widetilde{c}}(t) \times \ddot{\widetilde{c}}(t),\ \ [r_u \times r_v]\,(\widetilde{c}(t)) \right\rangle = 0.$$

Această ultimă condiţie este echivalentă cu condiţia ca curba $\widetilde{C}$ să fie geodezică pe suprafaţa Σ. ■

Observaţia 6.6.4 *Este important de subliniat faptul că dacă drumul cel mai scurt dintre două puncte distincte ale unei suprafeţe Σ este o întotdeauna o geodezică, reciproca nu este însă adevărată. Cu alte cuvinte, o geodezică nu reprezintă neapărat drumul cel mai scurt dintre cele două puncte. Geodezicele care minimizează drumul dintre două puncte se numesc* ***geodezice minimale****.*

Exemplul 6.6.5 *Vom arăta că geodezicele unui plan sunt dreptele situate în acel plan. Să considerăm un plan π de ecuaţie $z = ax + by + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Rezultă că avem planul parametrizat $\pi = \operatorname{Im} r$, unde $r(u, v) = (u, v, au + bv + c)$. Deducem că ecuaţia diferenţială a geodezicelor planului π este*

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{dv}{du} & a + b\dfrac{dv}{du} \\ 0 & \dfrac{d^2v}{du^2} & b\dfrac{d^2v}{du^2} \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + a^2 + b^2) \cdot \frac{d^2v}{du^2} = 0.$$

Integrând, găsim că geodezicele planului sunt ridicatele curbelor plane

$$C_{\alpha,\beta} : v = \alpha u + \beta,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, geodezicele planului π sunt curbele în spaţiu

$$\widetilde{c}_{\alpha,\beta}(u) = (u, \alpha u + \beta, [a + \alpha b]\, u + b\beta + c).$$

Aceste curbe (geodezice) sunt exact dreptele de ecuaţii implicite

$$d_{\alpha,\beta} : \begin{cases} y = \alpha x + \beta \\ z = ax + by + c. \end{cases}$$

Deoarece prin două puncte distincte ale planului π trece o ***unică*** *dreaptă din familia de geodezice $d_{\alpha,\beta}$, deducem ca drumul cel mai scurt dintre cele două puncte este segmentul de dreaptă din planul π, care uneşte acele puncte.*

6.7 Probleme rezolvate

1. Să se parametrizeze *pseudosfera* definită implicit de ecuaţia

$$\Sigma : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} - \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2 \in (0,1], \quad z > 0.$$

Rezolvare. Deoarece $x^2 + y^2 \in (0,1]$, putem lua $x^2 + y^2 = \cos^2 u$, $u \in [0, \pi/2)$. Deducem că avem $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $v \in [0, 2\pi)$. Prin calcul, găsim

$$z = -\sin u - \ln \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right].$$

În concluzie, pseudosfera Σ poate fi privită ca suprafaţa parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : [0, \pi/2) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right]\right),$$

cu condiţia

$$\sin u + \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right] < 0.$$

■

2. Să se determine ecuaţiile carteziene implicite ale suprafeţelor parametrizate:

   (a) $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, $r_1(u,v) = (u+v, u-v, uv)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2$, $r_2(u,v) = (u + \sin v, u + \cos v, u)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

   (c) $\Sigma_3 = \operatorname{Im} r_3$, $r_3 : [(0, 2\pi)\backslash\{\pi\}] \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$, unde

$$r_3(u,v) = \left(\cos u + v \cos u \cos\frac{u}{2}, \sin u + v \sin u \cos\frac{u}{2}, \sin\frac{u}{2}\right).$$

Rezolvare. (a) Deoarece $x = u + v$ şi $y = u - v$, deducem că

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}.$$

Rezultă că suprafaţa Σ_1 este descrisă de ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_1 : z = \frac{x^2 - y^2}{4} \Leftrightarrow \Sigma_1 : x^2 - y^2 = 4z.$$

Cu alte cuvinte, suprafaţa Σ_1 este un paraboloid hiperbolic.

(b) Este evident că $x - z = \sin v$ şi $y - z = \cos v$. Prin urmare, suprafaţa Σ_2 este cilindrul eliptic (prin reducerea la forma canonică a cuadricei):

$$\Sigma_2 : (x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

(c) Deoarece avem $z = \sin(u/2)$, rezultă că următoarele relaţii sunt adevărate: $\cos(u/2) = \pm\sqrt{1-z^2}$, $\cos u = 1 - 2z^2$ şi $\sin u = \pm 2z\sqrt{1-z^2}$. Aceasta înseamnă că

$$x = (1-2z^2)(1 \pm v\sqrt{1-z^2}), \quad y = \pm 2z\sqrt{1-z^2}(1 \pm v\sqrt{1-z^2}).$$

Prin eliminarea parametrului v obţinem ecuaţia carteziană implicită

$$\Sigma_3 : 4x^2z^2\left(1 - z^2\right) = y^2(1 - 2z^2)^2,$$

unde $z \in (-1, 1)\backslash\{0, \pm\sqrt{2}/2\}$ şi

$$\frac{x}{1 - 2z^2},\ \pm\frac{y}{2z\sqrt{1 - z^2}} \in \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Cazurile de excepţie $z = \pm\sqrt{2}/2$ se tratează separat. ■

3. Să se determine planul tangent şi normala la suprafaţă, în următoarele cazuri:

   (a) $\Sigma_1 : z = x^3 + y^3$, în punctul $P(1, 2, 9)$;

   (b) $\Sigma_2 : x = ue^v$, $y = ue^{-v}$, $z = 4uv$, unde $u \neq 0$, în punctul $P(u = 2, v = 0)$.

Rezolvare. (a) Deoarece avem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z$, prin derivări parţiale, deducem că

$$grad(f)(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, -1).$$

Prin urmare, obţinem $grad(f)(P) = (3, 12, -1)$. În concluzie, ecuaţia planului tangent este

$$T_P\Sigma : 3x + 12y - z - 18 = 0,$$

iar ecuaţia dreptei normale are expresia

$$N_P\Sigma : \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{12} = \frac{z - 9}{-1}.$$

(b) Avem $r(u, v) = (ue^v, ue^{-v}, 4uv)$. Rezultă că punctul $P(u = 2, v = 0)$ are coordonatele carteziene $P(2, 2, 0)$. Prin derivări parţiale, deducem că

$$r_u = (e^v, e^{-v}, 4v), \quad r_v = (ue^v, -ue^{-v}, 4u).$$

Deoarece $r_u(P) = (1, 1, 0)$ şi $r_v(P) = (2, -2, 8)$, găsim că normala în P la suprafaţa Σ_2 este

$$r_u(P) \times r_v(P) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 8\bar{i} - 8\bar{j} - 4\bar{k} \equiv (8, -8, -4).$$

În concluzie, ecuaţia planului tangent este

$$T_P\Sigma : 2x - 2y - z = 0,$$

iar ecuaţia dreptei normale are expresia

$$N_P\Sigma : \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

■

4. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente şi ale dreptelor normale la cuadrica

$$\Sigma : xy + z^2 - 2 = 0,$$

în punctele ei de intersecţie cu axa Oz şi în punctul $A(-1, -1, 1)$.

Rezolvare. Derivatele parţiale ale funcţiei care defineşte cuadrica Σ sunt:

$$f_x(x, y, z) = y, \quad f_y(x, y, z) = x, \quad f_z(x, y, z) = 2z,$$

şi, prin urmare, avem

$$grad(f)(x, y, z) = (y, x, 2z).$$

Luând $x = y = 0$, deducem că punctele de intersecţie ale cuadricei Σ cu axa Oz sunt: $P(0, 0, \sqrt{2})$ şi $Q(0, 0, -\sqrt{2})$. Avem atunci următorii gradienţi:

$$grad(f)(P) = (0, 0, 2\sqrt{2}), \quad grad(f)(Q) = (0, 0, -2\sqrt{2}),$$

$$grad(f)(A) = (-1, -1, 2).$$

În concluzie, ecuaţiile planelor tangente şi a normalelor cerute sunt:

$$T_P\Sigma : z - \sqrt{2} = 0, \quad T_Q\Sigma : z + \sqrt{2} = 0, \quad T_A\Sigma : x + y - 2z + 4 = 0.$$

$$N_P\Sigma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad N_Q\Sigma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad N_A\Sigma : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

■

5. Să se calculeze aria torului circular $\Sigma = \operatorname{Im} r$, de raze $R > \rho > 0$, definit de

$$r(u, v) = ((R + \rho \cos u) \cos v, (R + \rho \cos u) \sin v, \rho \sin u),$$

unde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

Rezolvare. Să calculăm prima formă fundamentală a torului circular $\Sigma = \operatorname{Im} r$. Prin derivări parţiale, obţinem

$$\begin{aligned} r_u &= (-\rho \sin u \cos v, -\rho \sin u \sin v, \rho \cos u), \\ r_v &= (-(R + \rho \cos u) \sin v, (R + \rho \cos u) \cos v, 0). \end{aligned}$$

Prin urmare, coeficienţii primei forme fundamentale a torului circular sunt $E = \rho^2$, $F = 0$ şi $G = (R + \rho \cos u)^2$. Determinantul primei forme fundamentale

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & (R + \rho \cos u)^2 \end{pmatrix}$$

este $\det g = [\rho(R + \rho \cos u)]^2$. În concluzie, aria torului circular Σ se calculează după formula

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \iint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} \rho(R + \rho \cos u) du dv = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (R + \rho \cos u) dv \right) du = \\ &= 2\pi\rho \int_0^{2\pi} (R + \rho \cos u) du = 2\pi\rho(Ru + \rho \sin u)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 R\rho. \end{aligned}$$

■

6. Să se arate că suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(u,v) |\ u = v\} \to \mathbb{R}^3, \quad r(u,v) = (u+v, uv, u^3+v^3),$$

conţine numai puncte hiperbolice.

Rezolvare. În urma calculelor, găsim că prima formă fundamentală a suprafeţei Σ este

$$g = \begin{pmatrix} 1+v^2+9u^4 & 1+uv+9u^2v^2 \\ 1+uv+9u^2v^2 & 1+u^2+9v^4 \end{pmatrix}.$$

A doua formă fundamentală a suprafeţei Σ are expresia

$$b = \pm \frac{3}{\sqrt{1+9(u+v)^2+9(u^2+uv+v^2)^2}} \begin{pmatrix} 2u & u+v \\ u+v & 2v \end{pmatrix},$$

unde semnul " $+$" apare când $u > v$, iar semnul " $-$" apare când $u < v$. În concluzie, curbura Gauss a suprafeţei Σ are valoarea

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{-9}{[1+9(u+v)^2+9(u^2+uv+v^2)^2]^2}.$$

Deoarece $K(P) < 0$, $\forall\ P \in \Sigma$, deducem că suprafaţa Σ conţine numai puncte hiperbolice. ■

7. Să se determine punctele ombilicale ale suprafeţei Ţiţeica $\Sigma : xyz = 1$ şi să se calculeze curburile principale în aceste puncte.

Rezolvare. Parametrizăm suprafaţa Ţiţeica $\Sigma : xyz = 1$ cu ajutorul aplicaţiei $r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(u,v) \mid uv = 0\} \to \mathbb{R}^3$, unde

$$r(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{uv}\right).$$

Prin calcul, deducem ca formele fundamentale ale suprafeţei Ţiţeica au expresiile

$$g = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{u^4v^2} & \dfrac{1}{u^3v^3} \\ \dfrac{1}{u^3v^3} & 1+\dfrac{1}{u^2v^4} \end{pmatrix}$$

şi

$$b = \frac{1}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{2v}{u} & 1 \\ 1 & \dfrac{2u}{v} \end{pmatrix}.$$

Condiţia ca un punct $P = r(u,v) \in \Sigma$ să fie ombilical este ca

$$\frac{l(P)}{E(P)} = \frac{m(P)}{F(P)} = \frac{n(P)}{G(P)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{2v}{u}}{1+\dfrac{1}{u^4v^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{u^3v^3}} = \frac{\dfrac{2u}{v}}{1+\dfrac{1}{u^2v^4}}.$$

Cu alte cuvinte, în urma calculelor, trebuie să avem $u^2v^4 = u^4v^2 = 1$. Cu alte cuvinte, avem patru puncte ombilicale pe suprafaţa Ţiţeica: $P(u = -1, v = -1)$, $Q(u = -1, v = 1)$, $R(u = 1, v = -1)$ şi $S(u = 1, v = 1)$. Este evident că

$$g(P) = g(S) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(P) = b(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g(Q) = g(R) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(Q) = b(R) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţiile Weingarten în aceste patru puncte sunt $L(P) = L(S) = (1/\sqrt{3})I_2$ şi $L(Q) = L(R) = -(1/\sqrt{3})I_2$. Prin urmare, curburile principale în aceste puncte sunt valorile proprii ale aplicaţiilor Weigarten, adică avem

$$K_1(P) = K_2(P) = K_1(S) = K_2(S) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$K_1(Q) = K_2(Q) = K_1(R) = K_2(R) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

8. Să se găsescă suprafeţele $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, v) \mid v \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*),$$

care sunt minimale.

Rezolvare. Formele fundamentale ale suprafeţei de rotaţie Σ sunt

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f'^2(u) & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}} \begin{pmatrix} f''(u) & 0 \\ 0 & uf'(u) \end{pmatrix},$$

unde $f'(u)$ (respectiv $f''(u)$) reprezintă derivata de ordinul întâi (respectiv al doilea) a funcţiei necunoscute f, iar semnele "$\pm$" apar după cazurile $u > 0$ şi $u < 0$. Expresia aplicaţiei lui Weingarten

$$L = g^{-1}b = \pm \frac{1}{u(1 + f'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} uf'' & 0 \\ 0 & f'(1 + f'^2) \end{pmatrix}$$

conduce la curbura medie

$$H = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Trace}(L) = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{uf'' + f'(1 + f'^2)}{u(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

În concluzie, suprafaţa Σ este minimală dacă şi numai dacă

$$uf'' + f'(1 + f'^2) = 0.$$

Notând acum $f'(u) = g(u)$, deducem ca ecuaţia diferenţială anterioară se rescrie

$$ug'(u) = -g(1 + g^2) \Leftrightarrow -\frac{1}{g(1 + g^2)} g'(u) = \frac{1}{u}.$$

Prin integrare, în urma calculelor, găsim

$$\frac{g^2+1}{g^2} = C^2u^2 \Leftrightarrow f' = g = \pm\frac{1}{C\sqrt{u^2 - \dfrac{1}{C^2}}}, \quad C > 0.$$

În final, din nou prin integrare, obţinem

$$f(u) = \pm\frac{1}{C} \cdot \ln\left|u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{C^2}}\right| + \ln C_1,$$

unde $C, C_1 > 0$. ■

9. Să se arate că pseudosfera $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u,v) = \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right]\right),$$

este un spaţiu cu curbură constantă negativă.

Rezolvare. Prin calcul, deducem ca pseudosfera $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este caracterizată de următorii coeficienţi ai primei forme fundamentale: $E = \tan^2 u$, $F = 0$ şi $G = \cos^2 u$. Coeficienţii celei de a-II-a forme fundamentale a pseudosferei sunt $l = \tan u$, $m = 0$ şi $n = -\sin u \cos u$. În concluzie, curbura Gauss a pseudosferei Σ are valoarea

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -1.$$

■

10. Să se demonstreze că o suprafaţă Σ este un plan dacă şi numai dacă a doua formă fundamentală a suprafeţei este identic nulă.

Rezolvare. " $\Rightarrow$ " Daca planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ este imaginea parametrizării

$$r(u,v) = \left(u, v, \frac{-D - Au - Bv}{C}\right),$$

unde $C \neq 0$ şi $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, atunci, prin calcul, deducem că $l = m = n = 0$.

" $\Leftarrow$ " Să presupunem acum că $l = m = n = 0$ pentru orice punct al unei suprafeţei Σ. Atunci avem

$$l = \langle r_{uu}, U\rangle = -\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial u}\right\rangle = 0,$$

unde $U = \dfrac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$ este versorul normal la suprafaţă. Deducem că avem

$$\frac{\partial U}{\partial u} \perp r_u.$$

Analog, avem

$$m = \langle r_{uv}, U\rangle = -\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial U}{\partial u}\right\rangle = 0,$$

adică
$$\frac{\partial U}{\partial v} \perp r_u \text{ şi } \frac{\partial U}{\partial u} \perp r_v.$$
Din relaţia
$$n = \langle r_{vv}, U\rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle = 0$$
obţinem că
$$\frac{\partial U}{\partial v} \perp r_v.$$
Dacă ţinem cont acum că avem şi egalităţile (pe care le obţinem prin derivarea relaţiei $\langle U, U\rangle = 1$)
$$\left\langle U, \frac{\partial U}{\partial u}\right\rangle = \left\langle U, \frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial u} \perp U \text{ şi } \frac{\partial U}{\partial v} \perp U,$$
conchidem că
$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$
Cu alte cuvinte, versorul normal U este un vector constant (nu depinde de punctul de pe suprafaţă). Fie acum $P_0 = r(u_0, v_0)$ un punct fixat pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$ şi fie $P = r(u, v)$ un punct arbitrar al suprafeţei. Să notăm $p = \langle P - P_0, U\rangle$. Evident, prin derivări parţiale ale funcţiei p, găsim
$$\frac{\partial p}{\partial u} = \langle r_u, U\rangle = 0 \text{ şi } \frac{\partial p}{\partial v} = \langle r_v, U\rangle = 0,$$
adică $p = C =$*constant*. Luând $P = P_0$, găsim $C = 0$, adică
$$\langle P - P_0, U\rangle = 0, \quad \forall\ P \in \Sigma.$$
Aceasta nu înseamnă altceva decât că ecuaţia suprafeţei Σ este ecuaţia vectorială a unui plan de normală U. ■

11. Se consideră suprafaţa cilindrică circulară $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde
$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$
Să se determine geodezicele cilindrului Σ.

Rezolvare. Prin derivări parţiale succesive, găsim
$$\begin{aligned} r_u &= (-\sin u, \cos u, 0), & r_v &= (0, 0, 1), \\ r_{uu} &= (-\cos u, -\sin u, 0), & r_{uv} &= r_{vv} = (0, 0, 0). \end{aligned}$$
Rezultă că, în urma calculelor, obţinem $r_u \times r_v = (\cos u, \sin u, 0)$. Mai departe, obţinem
$$r_u + r_v \frac{dv}{du} = \left(-\sin u, \cos u, \frac{dv}{du}\right),$$
$$r_{uu} + 2r_{uv}\frac{dv}{du} + r_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + r_v\frac{d^2v}{du^2} = \left(-\cos u, -\sin u, \frac{d^2v}{du^2}\right).$$

şi

$$r_v + r_u\frac{du}{dv} = \left(-\frac{du}{dv}\sin u, \frac{du}{dv}\cos u, 1\right),$$

$$r_{vv} + 2r_{uv}\frac{du}{dv} + r_{uu}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + r_u\frac{d^2u}{dv^2} =$$

$$= \left(-\left(\frac{du}{dv}\right)^2\cos u - \frac{d^2u}{dv^2}\sin u, -\left(\frac{du}{dv}\right)^2\sin u + \frac{d^2u}{dv^2}\cos u, 0\right).$$

În aceste condiţii, avem:

(a) Ecuaţia diferenţială a geodezicelor cilindrului Σ, care au forma

$$C_1 : v = v(u),$$

este

$$\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & \dfrac{dv}{du} \\ -\cos u & -\sin u & \dfrac{d^2v}{du^2} \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2v}{du^2} = 0.$$

Rezolvând ecuaţia anterioară, deducem că

$$v(u) = au + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, o familie de geodezice ale cilindrului Σ sunt curbele

$$\widetilde{c}_1(t) = r(t, v(t)) = (\cos t, \sin t, at + b), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i. Dacă $a \neq 0$, curbura şi torsiunea curbei $\widetilde{C}_1 = \operatorname{Im}\widetilde{c}_1$ sunt

$$k_1(t) = \frac{1}{a^2+1} = \text{constantă pozitivă}, \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

şi

$$\tau_1(t) = \frac{a}{a^2+1} = \text{constantă nenulă}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, $\widetilde{C}_1$ este o elice circulară.

ii. Dacă $a = 0$, atunci $\widetilde{C}_1$ este un cerc de rază $\rho = 1$, de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = b, \end{cases}$$

unde $b \in \mathbb{R}$ este fixat arbitrar.

(b) Ecuaţia diferenţială a geodezicelor cilindrului Σ, care au forma

$$C_2 : u = u(v),$$

este

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{du}{dv}\sin u & \dfrac{du}{dv}\cos u & 1 \\ -\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2\cos u - \dfrac{d^2u}{dv^2}\sin u & -\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2\sin u + \dfrac{d^2u}{dv^2}\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia de mai sus este echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{d^2u}{dv^2} = 0,$$

a cărei soluţie este

$$u(v) = \alpha v + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, o altă familie de geodezice ale cilindrului Σ sunt curbele

$$\widetilde{c}_2(t) = r(u(t), t) = (\cos(\alpha t + \beta), \sin(\alpha t + \beta), t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i. Dacă $\alpha \neq 0$, curbura şi torsiunea curbei $\widetilde{C}_2 = \operatorname{Im} \widetilde{c}_2$ sunt

$$k_2(t) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} = \text{constantă pozitivă}, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

şi

$$\tau_2(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} = \text{constantă nenulă}, \ \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, $\widetilde{C}_2$ este o elice circulară.

ii. Dacă $\alpha = 0$, atunci $\widetilde{C}_2$ este dreapta de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = \cos\beta \\ y = \sin\beta \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde $\beta \in \mathbb{R}$ este fixat arbitrar.

În concluzie, geodezicele cilindrului $\Sigma : x^2 + y^2 = 1$ sunt de trei tipuri:

(a) elice circulare situate pe cilindru;

(b) cercuri de rază $\rho = 1$, cu centrul pe axa Oz şi situate în plane paralele cu planul xOy;

(c) drepte paralele cu axa Oz, care sunt situate pe cilindrul Σ (ele reprezintă generatoarele cilindrului). ■

6.8 Probleme propuse

1. Să se determine ecuaţiile carteziene implicite ale suprafeţelor parametrizate:

(a) – *elicoidul drept*: $\Sigma_1 = \operatorname{Im} r_1$, unde $r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r_1(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v);$$

(b) – *catenoidul*: $\Sigma_2 = \operatorname{Im} r_2$, unde $r_2 : (1, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$r_2(u, v) = \left(u\cos v, u\sin v, \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)\right).$$

R. (a) $\Sigma_1 \backslash \{(x, 0, k\pi) \mid x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\} : x \sin z - y \cos z = 0$;

(b) $\Sigma_2 : z = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1}\right), \quad x^2+y^2 > 1$.

2. Să se arate că suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left(u + \frac{1}{v}, u - \frac{1}{v}, \frac{2u}{v}\right),$$

este dublu riglată.

R. Suprafaţa parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$ este paraboloidul hiperbolic (suprafaţă dublu riglată) de ecuaţie $\Sigma : x^2 - y^2 = 2z, \quad x \neq y$.

3. Să se determine punctele de pe elipsoidul

$$\Sigma : 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0,$$

în care normalele la suprafaţă sunt paralele cu dreapta

$$d : \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$

R. $P_1(-1, 1, 2)$ şi $P_2(1, -1, -2)$.

4. Fie suprafaţa $\Sigma : x^3 + y^3 + z^3 = R^3$, unde $R > 0$. Fie punctul $M(a, b, c)$ pe suprafaţa Σ, unde $a, b, c > 0$.

   (a) Să se scrie ecuaţia planului tangent şi a dreptei normale în M la Σ;

   (b) Să se găsească locul geometric descris de punctul M când planul tangent trece prin punctul fix $N(1, 1, 1)$;

   (c) Dacă A, B şi C sunt punctele în care planul tangent în M la Σ intersectează axele Ox, Oy şi Oz, să se demonstreze egalitatea

$$\frac{a}{||OA||} + \frac{b}{||OB||} + \frac{c}{||OC||} = 1.$$

R. (a) $T_M\Sigma : a^2x + b^2y + c^2z - R^3 = 0$, $N_M\Sigma : \dfrac{x-a}{a^2} = \dfrac{y-b}{b^2} = \dfrac{z-c}{c^2}$;

(b) Locul geometric este curba situată la intersecţia surafeţei Σ cu sfera centrată în originea $O(0, 0, 0)$ şi de rază $R\sqrt{R} > 0$, care are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^3.$$

(c) Avem $A(R^3/a^2, 0, 0)$, $B(0, R^3/b^2, 0)$ şi $C(0, 0, R^3/c^2)$. Relaţia cerută este acum imediată.

5. Fie suprafaţa parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ R \sin 2v), \quad R \in \mathbb{R}^*.$$

Fie punctul $M(u = a, v = b)$ pe suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(a) Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi dreptei normale în M la Σ;

(b) Să se găsească ecuaţiile curbei de intersecţie dintre suprafaţa Σ şi planul tangent în punctul M;

(c) Să se studieze natura acestei curbe pentru $b = 0$ şi $a > 0$. În ce caz este ea un cerc?

R. (a) $T_M\Sigma : (2R\sin b\cos 2b)\cdot x - (2R\cos b\cos 2b)\cdot y + a\cdot z - aR\sin 2b = 0$,

$$N_M\Sigma : \frac{x - a\cos b}{2R\sin b\cos 2b} = \frac{y - a\sin b}{-2R\cos b\cos 2b} = \frac{z - R\sin 2b}{a};$$

(b) Ecuaţia implicită a suprafeţei este $\Sigma : z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Rezultă că ecuaţiile implicite ale curbei căutate sunt

$$C_{a,b} : \begin{cases} (2R\sin b\cos 2b)\cdot x - (2R\cos b\cos 2b)\cdot y + a\cdot z - aR\sin 2b = 0 \\ z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2}, \ (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

(c) Luând $b = 0$ şi $a > 0$, curba de intersecţie are ecuaţiile

$$C_{a,0} : \begin{cases} -2Ry + az = 0 \\ z = \dfrac{2Rxy}{x^2+y^2}, \ (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

care reprezintă reuniunea dintre axa Ox şi curba plană

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = \dfrac{2R}{a}\cdot y \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}, \end{cases}$$

din care se scoate originea $O(0, 0, 0)$. O parametrizare a curbei plane $\mathcal{C}$ este dată de

$$c(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\sin t, R\sin t\right).$$

Deoarece curbura curbei $\mathcal{C}$ este

$$k(t) = \frac{a^2(a^2 + 4R^2)}{2(a^2 + 4R^2\cos^2 t)^{3/2}},$$

adică este neconstantă, rezultă că curba $\mathcal{C}$ nu este niciodată un cerc.

6. Să se calculeze aria conului circular $\Sigma : y^2 + z^2 = x^2$, unde $0 < x^2 + y^2 \leq 1$.

R. Parametrizăm conul circular Σ. Luând $x = u$, $u \in \mathbb{R}$, deducem că $y = u\cos v$ şi $z = u\sin v$, $v \in [0, 2\pi]$. În concluzie, avem suprafaţa parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r(u, v) = (u, u\cos v, u\sin v),$$

a cărei primă formă fundamentală este

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece din relaţia $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ deducem că $u \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \backslash \{0\}$, rezultă că aria conului circular Σ se calculează după formula

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2 \iint_{\left(0,\sqrt{2}/2\right] \times [0,2\pi]} \left(\sqrt{2}u\right) dudv = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{2\pi} udv\right) du$$

$$= 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} udu = 2\pi\sqrt{2} \cdot u^2\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

7. Să se calculeze formele fundamentale ale *suprafeţei Monge* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

ştiind că $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

R. Formele fundamentale ale suprafeţei Monge $\Sigma = \operatorname{Im} r$, sunt

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix},$$

unde f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv} şi f_{vv} sunt derivatele parţiale de ordinul întâi (respectiv al doilea) ale funcţiei f.

8. Să se găsească punctele ombilicale ale elipsoidului

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

R. Dacă considerăm parametrizarea $x = a \cos u \sin v$, $y = b \sin u \sin v$, $z = c \cos v$, unde $(u, v) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, găsim patru puncte ombilicale:

$$P_{1,2,3,4}\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}\right),$$

9. Fie suprafaţa Ţiţeica $\Sigma : xyz = 1$. Să se demonstreze că există un punct fix P_0 din spaţiu, care are proprietatea

$$\frac{K(P)}{[d(P_0, T_P\Sigma)]^4} = \text{constant}, \quad \forall\ P \in \Sigma,$$

unde K este curbura Gauss a suprafeţei Ţiţeica.

R. Luăm punctul P_0 exact originea $O(0, 0, 0)$ a sistemului de axe. Atunci avem

$$\frac{K(P)}{[d(O, T_P\Sigma)]^4} = \frac{1}{27}, \quad \forall\ P \in \Sigma.$$

10. Să se arate că punctele planare ale suprafeţei

$$\Sigma : x + y = z^3$$

sunt punctele de pe dreapta $d : x + y = 0$, $z = 0$.

11. Să se studieze natura punctelor suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : [\mathbb{R}\backslash\{1\}] \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = ((1 - u)\cos v, (1 - u)\sin v, u).$$

R. Toate punctele suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$ sunt parabolice.

12. Să se calculeze curburile principale ale următoarelor suprafeţe definite explicit:

(a) $\Sigma_1 : z = e^{x+y} - 1$;

(b) $\Sigma_2 : z = \ln(\cos x) - \ln(\cos y), \quad \cos x > 0$ şi $\cos y > 0$;

(c) $\Sigma_3 : z = (x + 3y)^3$.

R. (a) $k_1^{\Sigma_1} = 0,\ k_2^{\Sigma_1} = \dfrac{2e^{u+v}}{[1 + 2e^{2(u+v)}]^{3/2}}$;

(b) $k_{1,2}^{\Sigma_2} = \pm\dfrac{\sqrt{(1 + \tan^2 u)(1 + \tan^2 v)}}{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}$;

(c) $k_1^{\Sigma_3} = 0,\ k_2^{\Sigma_3} = \dfrac{60(u + 3v)}{[1 + 90(u + 3v)^4]^{3/2}}$.

13. Să se calculeze curbura medie a suprafeţei $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : [(0, 2\pi)\backslash\{\pi\}] \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, 2\cos u).$$

R. Curbura medie a suprafeţei Σ este

$$H = \begin{cases} -\dfrac{2 + 3\sin^2 u}{(1 + 3\sin^2 u)^{3/2}}, & u \in (0, \pi) \\ \dfrac{2 + 3\sin^2 u}{(1 + 3\sin^2 u)^{3/2}}, & u \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

14. Să se demonstreze că *suprafaţa lui Enneper* $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$$

este o suprafaţă minimală.

R. În urma calculelor, deducem că avem $lG - 2mF + nE = 0$, ceea ce înseamnă că $H \equiv 0$. Cu alte cuvinte, suprafaţa lui Enneper este o suprafaţă minimală.

15. Să se determine funcţia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ astfel încât suprafaţa

$$\Sigma : z = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

să fie minimală.

R. $F(t) = C_1 + C \cdot \arctan t$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C > 0$.

16. Să se demonstreze că o suprafaţă regulată Σ are toate punctele ombilicale dacă şi numai dacă este o sferă.

R. Am demonstrat la secţiunea Probleme Rezolvate că sfera are toate punctele ombilicale. Reciproc, să presupunem că toate punctele unei suprafeţe Σ sunt ombilicale, adică avem

$$\frac{E}{l} = \frac{F}{m} = \frac{G}{n} = \alpha(u, v) \neq 0$$

pentru orice punct al suprafeţei. Vom arăta pentru început că $\alpha = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ este constantă. Cum avem

$$l = -\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial u} \right\rangle, \; m = -\left\langle r_u, \frac{\partial U}{\partial v} \right\rangle = -\left\langle r_v, \frac{\partial U}{\partial u} \right\rangle, \; n = -\left\langle r_v, \frac{\partial U}{\partial v} \right\rangle,$$

rezultă că

$$\left\langle r_u + \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial u}, r_u \right\rangle = 0 \text{ şi } \left\langle r_u + \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial u}, r_v \right\rangle = 0.$$

Aceste egalităţi implică

$$r_u + \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial u} = 0.$$

În caz contrar, vectorul $r_u + \alpha \cdot \partial U/\partial u$ ar fi coliniar cu normala, ceea ce este absurd (deoarece el se află în planul tangent). Analog, obţinem

$$r_v + \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$

Dacă derivăm acum funcţia vectorială $r_u + \alpha \cdot \partial U/\partial u$ în raport cu v şi funcţia $r_v + \alpha \cdot \partial U/\partial v$ în raport cu u, deducem egalitatea

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\partial U}{\partial u}$$

sau, echivalent,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot r_v = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot r_u.$$

Dacă $\partial\alpha/\partial u$ şi $\partial\alpha/\partial v$ ar fi nenuli, atunci r_u şi r_v ar fi coliniari, ceea ce implică $U = 0$ (absurd!). În concluzie, avem $\partial\alpha/\partial u = \partial\alpha/\partial v = 0$, adică $\alpha = a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Integrând acum relaţiile $r_u + a \cdot \partial U/\partial u = 0$ şi $r_v + a \cdot \partial U/\partial v$, găsim

$$r = r_0 - a \cdot U,$$

unde r_0 este o constantă de integrare şi $||U(u, v)|| = 1$. Aceasta este ecuaţia parametrică a sferei de rază $R = |a|$ şi centru $P_0 = r_0$.

17. Se consideră suprafaţa $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde $r : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1, 1)\} \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left(\frac{u^2}{2} + v, \frac{v^2}{2} + u, uv \right).$$

Să se arate că:

(a) Binormalele ridicatei curbei $C_1 : v = v_0$, unde $v_0 \in \mathbb{R}$, sunt paralele cu un plan fix din spaţiu;

(b) Ridicata curbei plane $C_2 : u = v$ este o curbă plană pe suprafaţa Σ.

R. (a) Ridicata curbei $C_1 : v = v_0$, unde $v_0 \in \mathbb{R}$, este curba

$$\widetilde{c}_1(t) = \left(\frac{t^2}{2} + v_0, \frac{v_0^2}{2} + t, tv_0\right),$$

care are versorul binormal constant

$$B_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + v_0^2}} \cdot (0, v_0, -1).$$

Prin urmare, toate binormalele sunt paralele cu planul fix $\pi : y + v_0 z = 0$.

(b) Ridicata curbei $C_2 : u = v$ este curba

$$\widetilde{c}_2(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} + t, t^2\right),$$

care are imaginea inclusă în planul $\pi : x - y = 0$.

18. Să se arate că geodezicele sferei sunt exact cercurile sale ecuatoriale.

R. Fie sfera parametrizată $\Sigma = \operatorname{Im} r$, unde

$$r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \quad R > 0.$$

Atunci, printr-un calcul laborios, deducem că ecuaţia diferenţială a geodezicelor sferei este

$$(\cos v) \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + 2 (\sin v) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \sin v \cos^2 v = 0.$$

Prin urmare, geodezicele sferei sunt curbele în spaţiu de forma

$$\widetilde{c}(u) = (R \cos u \cos v(u), R \sin u \cos v(u), R \sin v(u)),$$

unde funcţia $v(u)$ este soluţie a ecuaţiei de mai sus a geodezicelor.

În continuare, folosind ecuaţia geodezicelor, o serie de calcule extrem de laborioase arată că aceste geodezice (ca şi curbe în spaţiu) au curbura constantă $k = 1/R > 0$ şi torsiunea constant nulă $\tau = 0$. Cu alte cuvinte, ele sunt cercuri ecuatoriale.

Observaţie. Având două puncte arbitrare distincte P şi Q pe o sferă, atunci, prin aceste două puncte trece un unic cerc ecuatorial. Prin urmare, prin cele două puncte distincte trec două arce de geodezică: un arc "mic" şi unul "mare". În concluzie, geodezica minimală care trece prin punctele P şi Q este arcul "mic" al cercului ecuatorial situat la intersecţia dintre sferă şi planul determinat de P, Q şi centrul sferei.

Bibliografie

[1] Atanasiu, Gh., Munteanu, Gh., Postolache, M., *Algebră Liniară. Geometrie Analitică şi Diferenţială. Ecuaţii diferenţiale (Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[2] Atanasiu, Gh., Stoica, E., *Algebră Liniară. Geometrie Analitică*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[3] Balan, V., *Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Diferenţială*, Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, 1998.

[4] Balan, V., *Algebră Liniară. Geometrie Analitică*, Editura Fair Partners, Bucureşti 1999.

[5] Craioveanu, M., Albu, I., *Geometrie Afină şi Euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1982.

[6] Ianuş, S., *Curs de Geometrie Diferenţială*, Universitatea Bucureşti, 1981.

[7] Ianuş, S., *Geometrie Diferenţială cu Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1983.

[8] Miron, R., *Introducere în Geometria Diferenţială*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1971.

[9] Miron, R., *Geometrie Analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[10] Munteanu, Gh., Manea, A., *Geometrie Analitică*, Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2007.

[11] Neagu, M., Oană, A., *Geometrie Superioară în Plan şi în Spaţiu*, Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2008.

[12] Nicolescu, L., *Curs de Geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1990.

[13] Nicolescu, L., *Geometrie Diferenţială (Culegere de probleme)*, Universitatea Bucureşti, 1982.

[14] Obădeanu, V., *Elemente de Algebră Liniară şi Geometrie Analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[15] Oproiu, V., *Geometrie*, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, 1980.

[16] Păun, M., *Matematici pentru Silvicultori*, Vol. **I**, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2009.

[17] Pitiş, Gh., *Curs de Algebră, Geometrie şi Ecuaţii Diferenţiale*, Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1990.

[18] Radu, C., *Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1996.

[19] Radu, C., Drăguşin, L., Drăguşin, C., *Algebră Liniară. Analiză Matematică. Geometrie Analitică şi Diferenţială (Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2000.

[20] Soare, N., *Curs de Geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1996.

[21] Stoica, E., Neagu, M., *Algebră Liniară. Geometrie Analitică şi Diferenţială (Culegere de probleme)*, Editura Fair Partners, Bucureşti 2009.

[22] Teleman, K., *Geometrie Diferenţială Locală şi Globală*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[23] Teleman, K., *Metode şi Rezultate în Geometria Diferenţială Modernă*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1979.

[24] Turtoi, A., *Geometrie*, Universitatea Bucureşti, 1985.

[25] Udrişte, C., *Algebră Liniară. Geometrie Analitică*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 2000.

[26] Udrişte, C., *Geometrie Diferenţială. Ecuaţii Diferenţiale*, Editura Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1997.

[27] Vrânceanu, Gh., *Geometrie Analitică, Proiectivă şi Diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[28] Vrânceanu, Gh., Mărgulescu, G., *Geometrie Analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.